

1.9.5 Zjednodušování lomených výrazů I

Předpoklady: 010904

Zápis $\frac{\frac{4}{3+\sqrt{2}}}{\frac{2}{7}}$ už známe, jde složený zlomek. Platí: $\frac{\frac{4}{3+\sqrt{2}}}{\frac{2}{7}} = \frac{4 \cdot 7}{2(3+\sqrt{2})}$.

Podobně $\frac{\frac{V_1}{V_2}}{\frac{V_3}{V_4}}$ je složený lomený výraz \Rightarrow jak ho odstranit a převést na normální lomený výraz?

Zlomková čára znamená dělení $\Rightarrow \frac{\frac{V_1}{V_2}}{\frac{V_3}{V_4}} = \frac{V_1}{V_2} : \frac{V_3}{V_4}$ a dál už víme, co s tím.

Př. 1: Doplně větu: „Pro libovolné výrazy $V_1; V_2; V_3; V_4$ a pro všechny hodnoty proměnných,

pro něž je $V_2 \neq 0; V_3 \neq 0; V_4 \neq 0$ platí: $\frac{\frac{V_1}{V_2}}{\frac{V_3}{V_4}} = \dots$ “.

Pro libovolné výrazy $V_1; V_2; V_3; V_4$ a pro všechny hodnoty proměnných, pro něž

je $V_2 \neq 0; V_3 \neq 0; V_4 \neq 0$ platí: $\frac{\frac{V_1}{V_2}}{\frac{V_3}{V_4}} = \frac{V_1}{V_2} : \frac{V_3}{V_4} = \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{V_4}{V_3} = \frac{V_1 \cdot V_4}{V_2 \cdot V_3}$.

Postupujeme stejně jako u zlomků.

Poznámka: Způsob, jakým převedeme složený zlomek na normální, můžeme zdůvodnit

velice rychle i jinak. Složený lomený výraz $\frac{\frac{V_1}{V_2}}{\frac{V_3}{V_4}}$ znázorňuje dělení dvou čísel (modrého

červeným). Napíšeme si výsledný jednoduchý zlomek, do jeho čitatele umístíme výrazy, které zvětšují výsledek do jmenovatele výrazy, které výsledek zmenšují.

V_1 - je čitatelem děleného čísla \Rightarrow zvětšuje výsledek (patří nahoru).

V_2 - je jmenovatelem děleného čísla \Rightarrow zmenšuje výsledek (patří dolů).

V_3 - je čitatelem čísla, které dělí \Rightarrow zmenšuje výsledek (patří dolů).

V_4 - je jmenovatelem čísla, které dělí \Rightarrow zvětšuje výsledek (patří nahoru).

$$\Rightarrow \text{Platí: } \frac{\frac{V_1}{V_2}}{\frac{V_3}{V_4}} = \frac{V_1 \cdot V_4}{V_2 \cdot V_3}.$$

Př. 2: Zjednoduš výrazy.

$$\text{a) } \frac{\frac{4x^2y}{6a^2b^3}}{\frac{8xy^2}{12a^2b^4}} \quad \text{b) } \frac{\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}}{\frac{a+b}{a-b}} \quad \text{c) } \frac{\frac{x^2-9}{x^2+4x+3}}{\frac{x^2-4x+3}{x^2-1}} \quad \text{d) } \frac{4-x^2}{\frac{x^2-x-2}{x^2+3x+2}}$$

a) Podmínky: $x \neq 0$; $y \neq 0$; $a \neq 0$; $b \neq 0$.

$$\frac{\frac{4x^2y}{6a^2b^3}}{\frac{8xy^2}{12a^2b^4}} = \frac{4x^2y}{6a^2b^3} \cdot \frac{12a^2b^4}{8xy^2} = \frac{xb}{y}$$

b) Podmínky: $a \neq b$; $a \neq -b$.

$$\frac{\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}}{\frac{a+b}{a-b}} = \frac{(a+b)^2}{a^2-b^2} \cdot \frac{a-b}{a+b} = \frac{(a+b)^2}{(a+b)(a-b)} \cdot \frac{a-b}{a+b} = 1$$

c)

$$\frac{\frac{x^2-9}{x^2+4x+3}}{\frac{x^2-4x+3}{x^2-1}} = \frac{(x-3)(x+3)}{(x+3)(x+1)} = \frac{(x-3)(x+3)(x+1)(x-1)}{(x+3)(x+1)(x-3)(x-1)} = 1$$

Podmínky: $x \neq \pm 3$; $x \neq \pm 1$.

d)

$$\begin{aligned} \frac{4-x^2}{\frac{x^2-x-2}{x^2+3x+2}} &= \frac{(2-x)(2+x)}{(x-2)(x+1)} = \frac{(2-x)(2+x)(x+2)(x+1)}{(x-2)(x+1)} = \\ &= \frac{-(x-2)(2+x)(x+2)}{(x-2)} = -(x+2)^2 \end{aligned}$$

Podmínky: $x \neq \pm 2$; $x \neq -1$.

Pedagogická poznámka: Někteří studenti převádějí zlomek pomocí dělení a začnou krátit ještě před tím, než druhý zlomek v součinu převrátí a dělení převedou na násobení.

Napiší tedy: $\frac{(a+b)^2}{\frac{a^2-b^2}{a+b}} = \frac{(a+b)^2}{a^2-b^2} \cdot \frac{a+b}{a-b}$ a začnou krátit.

Většinou si sice situaci (mají napsaný podíl zlomků a nemohou krátit proti sobě) uvědomují, ale přesto často udělají chybu. Myslím, že je lepší trvat na tom, aby začali krátit až ve chvíli, kdy mají zlomek převedený na součin zlomků.

V bodě d) pak mají někteří studenti samozřejmě problémy s tím, zda výraz $4-x^2$ tvoří čítec nebo jmenovatel horního zlomku. Radím studentům, že přepsat si

zlomek do tvaru: $\frac{4-x^2}{\frac{x^2-x-2}{x^2+3x+2}} = \frac{4-x^2}{\frac{1}{x^2-x-2}}$, není to žádná ostuda.

Př. 3: Zjednoduš výrazy.

$$\text{a) } \frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{x-1}{3}}$$

$$\text{b) } \frac{x-\frac{1}{x}}{x+\frac{3x+1}{x-1}}$$

$$\text{c) } \frac{x+1}{1-\frac{x}{x-1}}$$

$$\text{d) } \frac{t-\frac{t-1}{t+1}}{1+\frac{t(t-1)}{t+1}}$$

a) Podmínky: $x \neq 1, x \neq 0$.

$$\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{x-1}{3}} = \frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x-1}{3}} = \frac{3(x-1)}{x(x-1)} = \frac{3}{x}$$

b) Podmínky: $x \neq \pm 1, x \neq 0$.

$$\frac{x-\frac{1}{x}}{x+\frac{3x+1}{x-1}} = \frac{\frac{x^2-1}{x}}{\frac{x^2-x+3x+1}{x-1}} = \frac{\frac{x^2-1}{x}}{\frac{x^2+2x+1}{x-1}} = \frac{(x-1)(x+1)}{x} \cdot \frac{x-1}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+1)(x-1)}{(x+1)^2 x} = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)}$$

c) Podmínky: $x \neq 1$.

$$\frac{x+1}{1-\frac{x}{x-1}} = \frac{x+1}{\frac{(x-1)-x}{x-1}} = \frac{x+1}{\frac{-1}{x-1}} = \frac{x+1}{1} \cdot \frac{x-1}{-1} = -(x^2-1) = 1-x^2$$

d) Podmínky: $t \neq -1$.

$$\frac{t-\frac{t-1}{t+1}}{1+\frac{t(t-1)}{t+1}} = \frac{\frac{t(t+1)-(t-1)}{t+1}}{\frac{(t+1)+t(t-1)}{t+1}} = \frac{\frac{t^2+t-t+1}{t+1}}{\frac{t^2+1}{t+1}} = \frac{t^2+1}{t+1} \cdot \frac{t+1}{t^2+1} = 1$$

Pedagogická poznámka: V předchozím příkladu jde o to, aby se studenti naučili nejdříve upravit složený výraz do tvaru, ve kterém je naprosto jasné, co je čítecem a jmenovatelem zlomků, které se mají zjednodušovat. Často se například v bodě c)

stává, že studenti začnou upravovat složený zlomek ještě před tím, než upraví zlomky. Například takto: $\frac{x+1}{1-\frac{x}{x-1}} = \frac{(x+1)(x-1)}{1-x}$.

Př. 4: Zjednoduš výrazy.

$$\text{a) } \frac{\frac{1-x}{1-x+x^2} + \frac{1+x}{1+x+x^2}}{\frac{1+x}{1+x+x^2} - \frac{1-x}{1-x+x^2}} \quad \text{b) } \left(\frac{\frac{1}{x} + \frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \right) : \left(\frac{x^{-1}}{1+x^{-1}} - \frac{1-x^{-1}}{x^{-1}} \right)$$

a) Podmínky: $x \neq 0$.

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1-x}{1-x+x^2} + \frac{1+x}{1+x+x^2}}{\frac{1+x}{1+x+x^2} - \frac{1-x}{1-x+x^2}} &= \frac{\frac{(1-x)(1+x+x^2) + (1+x)(1-x+x^2)}{(1-x+x^2)(1+x+x^2)}}{\frac{(1+x)(1-x+x^2) - (1-x)(1+x+x^2)}{(1+x+x^2)(1-x+x^2)}} = \\ &= \frac{1+x+x^2-x-x^2-x^3+1-x+x^2+x-x^2+x^3}{1-x+x^2+x-x^2+x^3 - (1+x+x^2-x-x^2-x^3)} = \frac{2}{2x^3} = \frac{1}{x^3} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\frac{1}{x} + \frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \right) : \left(\frac{x^{-1}}{1+x^{-1}} - \frac{1-x^{-1}}{x^{-1}} \right) &= \left(\frac{\frac{1}{x} + \frac{x-1}{x}}{\frac{x}{x+1}} \right) : \left(\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} - \frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \right) = \\ &= \left(\frac{1}{x+1} + x-1 \right) : \left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{x}{x+1}} - \frac{x}{x} \right) = \left(\frac{1+x^2-1}{x+1} \right) : \left(\frac{1}{x+1} - [x-1] \right) = \\ &= \left(\frac{x^2}{x+1} \right) : \left(\frac{1-x^2+1}{x+1} \right) = \left(\frac{x^2}{x+1} \right) \cdot \left(\frac{x+1}{2-x^2} \right) = \frac{x^2}{2-x^2} \end{aligned}$$

Podmínky: $x \neq 0$, $x \neq -1$, $2-x^2 \neq 0$.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je víceméně bonbónkem pro šikovnější počtáře.

Př. 5: Sběrka příklad 9.

Shrnutí: I složené lomené výrazy se upravují analogicky jako složené zlomky.