

1.9.6 Zjednodušování lomených výrazů II

Předpoklady: 010905

Pedagogická poznámka: Tato hodina není z matematického hlediska moc zajímavá, ale jde o velmi dobré cvičení na orientaci ve výrazu (hledání zlomků, které je možné zjednodušit) a na pečlivost zápisu (bez ní se příklady vyřešit opravdu nedají). Je možné tuto hodinu zcela vynechat, ale pro studenty je poměrně zajímavá, nejen tím, že zjistí, jaké dělají chyby, ale i tím, že pokud se jim podaří dopočítat jeden z bodů příkladu 4, připadají si jako opravdoví vítězové (velký holky a velcí kluci).

Př. 1: Zjednoduš výrazy. Jak poznáme, která ze zlomkových čar je základní?

$$\text{a) } \frac{\frac{a^2-1}{a+1}}{a} \qquad \text{b) } \frac{\frac{a^2-1}{a+1}}{a}$$

a) Podmínky: $a \neq 0; a \neq -1$.

$$\frac{\frac{a^2-1}{a+1}}{a} = \frac{(a^2-1) \cdot a}{a+1} = \frac{(a-1) \cdot (a+1) \cdot a}{a+1} = (a-1) \cdot a$$

b) Podmínky: $a \neq 0; a \neq -1$.

$$\frac{\frac{a^2-1}{a+1}}{a} = \frac{a^2-1}{(a+1) \cdot a} = \frac{(a+1) \cdot (a-1)}{(a+1) \cdot a} = \frac{(a-1)}{a}$$

Základní zlomková čára stojí naproti znaménku a bývá většinou delší.

Základní zlomková čára stojí vždy naproti znaménku.

Pedagogická poznámka: Nechávám studenty, aby si zkusili první příklad počítat sami bez dalšího vysvětlování. Po cca sedmi minutách, kdy je opravuji v lavicích, **si na chvíli ukážeme jeho řešení na tabuli (bez toho, aby si jej studenti opisovali). Pak řešení schováme, ti, kteří příklad nedokázali spočítat sami, si ho spočítají a poté se všichni vrhnou na příklad 2.** Vy zbytku hodiny pak kromě opravování v lavicích krokuji příklady na tabuli (zapíšu jedno = probereme další krok, necháme čas na samostatné řešení v lavici, zapíšeme další =, ...).

Př. 2: Uprav složený lomený výraz $\frac{1}{1 + \frac{a}{1 - \frac{1}{a}}}$.

Můžeme zjednodušovat zlomky, u kterých známe jmenovatel a čítelel.

$\frac{1}{1 + \frac{a}{1 - \frac{1}{a}}}$ - složený zlomek je složený ze složeného zlomku, u kterého neznáme zlomek ve

jmenovateli (je tam výraz $1 - \frac{1}{a}$, ne obyčejný zlomek s čítelelem a jmenovatelem) \Rightarrow zlomek

musíme upravit, abychom jmenovatel znali $\frac{1}{1 + \frac{a}{1 - \frac{1}{a}}} = \frac{1}{1 + \frac{a}{\frac{a-1}{a}}}$.

Červeně vyznačená část je složený zlomek, pro který platí: $\frac{a}{\frac{a-1}{a}} = \frac{\frac{a}{1}}{\frac{a-1}{a}} = \frac{a \cdot a}{a-1} = \frac{a^2}{a-1} \Rightarrow$

můžeme pokračovat v úpravách: $\frac{1}{1 + \frac{a}{1 - \frac{1}{a}}} = \frac{1}{1 + \frac{a}{\frac{a-1}{a}}} = \frac{1}{1 + \frac{a^2}{a-1}} = \frac{1}{\frac{a-1+a^2}{a-1}} = \frac{a-1}{a^2+a-1}$.

Podmínky: $a \neq 1$; $a \neq 0$; $a^2 + a - 1 \neq 0$.

Pedagogická poznámka: Většina problémů vyplývá buď ze špatného opisování (už zadání bývá často opsáno špatně, někdy je třeba zdůraznit, že různá délka zlomkových čar má svůj význam) nebo špatným pochopením toho, co je vlastně složeným zlomkem, který je možné upravit.

Př. 3: Zjednoduš zlomek $\frac{1}{1 + \frac{a}{1 + \frac{a}{1 - \frac{1}{a}}}}$.

Podobný, ale složitější výraz než minule \Rightarrow budeme postupovat stejně jako v předchozím příkladě, složené zlomky, které budeme zjednodušovat, vždy vyznačíme červeně.

$$\frac{1}{1+\frac{a}{1+\frac{a}{1-\frac{1}{a}}}} = \frac{1}{1+\frac{a}{1+\frac{a}{\frac{a-1}{a}}}} = \frac{1}{1+\frac{a}{1+\frac{a^2}{a-1}}} = \frac{1}{1+\frac{a}{\frac{a^2-a+1}{a-1}}} = \frac{1}{1+\frac{a(a-1)}{a^2-a+1}} = \frac{1}{\frac{a^2+a-1+a^2-a}{a^2+a-1}} = \frac{1}{\frac{2a^2-1}{a^2+a-1}} = \frac{a^2+a-1}{2a^2-1}$$

Podmínky: $a \neq 1$; $a \neq 0$; $a^2 + a - 1 \neq 0$; $a \neq \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Př. 4: Odstraň složené zlomky.

$$\text{a) } \frac{1}{1-\frac{a}{1+\frac{a}{1-\frac{1}{a+\frac{1}{a}}}}}$$

$$\text{b) } \frac{1+\frac{1+a}{a+\frac{a}{a-1}}}{a-1}$$

a) Podobný, ale složitější výraz než minule \Rightarrow budeme postupovat stejně jako v předchozím příkladě, složené zlomky, které budeme zjednodušovat, vždy vyznačíme červeně.

$$\frac{1}{1-\frac{a}{1+\frac{a}{1-\frac{1}{a+\frac{1}{a}}}}} = \frac{1}{1-\frac{a}{1+\frac{a}{1-\frac{1}{\frac{a^2+1}{a}}}}} = \frac{1}{1-\frac{a}{1+\frac{a}{1-\frac{a}{a^2+1}}}} = \frac{1}{1+\frac{a}{\frac{a^2+1-a}{a^2+1}}} = \frac{1}{1+\frac{a(a^2+1)}{a^2-a+1}} = \frac{1}{\frac{a^2-a+1+a^3+a}{a^2-a+1}} = \frac{1}{1-\frac{a}{\frac{a^3+a^2+1}{a^2-a+1}}} = \frac{1}{1-\frac{a(a^2-a+1)}{a^3+a^2+1}} = \frac{1}{\frac{a^3+a^2+1-(a^3-a^2+a)}{a^3+a^2+1}} = \frac{1}{\frac{2a^2-a+1}{a^3+a^2+1}} = \frac{a^3+a^2+1}{2a^2-a+1}$$

b) To samé v bledě modrém \Rightarrow stejný postup.

$$\frac{1+\frac{1+a}{a+\frac{a}{a-1}}}{a-1} = \frac{\frac{a+1+a}{a+\frac{a}{a-1}}}{a-1} = \frac{\frac{2a+1}{a+\frac{a}{a-1}}}{a-1} = \frac{a+\frac{2a+1}{a^2}}{a-1} = \frac{a^2+2a+1}{a^2(a-1)}$$

$$\begin{aligned}
1 + \frac{a^3 + 2a + 1}{a^2} &= 1 + \frac{a^3 + 2a + 1}{a^2(a-1)} = \frac{a^3 - a^2 + a^3 + 2a + 1}{a^3 - a^2} = \frac{2a^3 - a^2 + 2a + 1}{a^3 - a^2} = \\
\frac{2a^3 - a^2 + 2a + 1}{a-1} &= \frac{2a^3 - a^2 + 2a + 1}{a^2(a-1)^2}
\end{aligned}$$

Shrnutí: Složitější složené lomené výrazy vyžadují dobrou orientaci, poctivé opisování a trpělivost.