

1.9.7 Lomené výrazy - shrnutí

Předpoklady: 010906

Důležité znalosti

- Lomené výrazy jsou v zásadě zlomky, a proto s nimi pracujeme podobně jako se zlomky.

$$\circ \frac{1 \pm 3}{2 \cdot 5} = \frac{1 \cdot 5 \pm 3 \cdot 2}{2 \cdot 5} \Rightarrow \frac{V_1 \pm V_3}{V_2 \cdot V_4} = \frac{V_1 \cdot V_4 \pm V_3 \cdot V_2}{V_2 \cdot V_4}; V_2 \neq 0; V_4 \neq 0.$$

$$\circ \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 5} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{V_3}{V_4} = \frac{V_1 \cdot V_3}{V_2 \cdot V_4}; V_2 \neq 0; V_4 \neq 0.$$

$$\circ \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2^k}{3^k} \Rightarrow \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^k = \frac{V_1^k}{V_2^k}; V_2 \neq 0.$$

$$\circ \frac{1}{2} : \frac{3}{5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 3} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} : \frac{V_3}{V_4} = \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{V_4}{V_3} = \frac{V_1 \cdot V_4}{V_2 \cdot V_3}; V_2 \neq 0; V_3 \neq 0; V_4 \neq 0.$$

$$\circ \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 3} \Rightarrow \frac{\frac{V_1}{V_2}}{\frac{V_3}{V_4}} = \frac{V_1}{V_2} : \frac{V_3}{V_4} = \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{V_4}{V_3} = \frac{V_1 \cdot V_4}{V_2 \cdot V_3}; V_2 \neq 0; V_3 \neq 0; V_4 \neq 0.$$

- Nulou nelze dělit \Rightarrow u všech jmenovatelů bychom měli zapsat podmínku.
- Hlavní zlomková čára se píše do stejné úrovně jako znaménka.

Zádrhele

- Podmínka je dána konkrétním jmenovatelem a nedá se napsat bez jeho prostudování.
- Mínus před zlomkem patří všem členům v čitateli:

$$-\frac{x-1}{x+1} = -\frac{x}{x+1} - \frac{-1}{x+1} = \frac{-x}{x+1} + \frac{+1}{x+1}$$

- Ne vždy můžeme rozšířit na libovolný jmenovatel (společný jmenovatel ale najdeme vždy).

Dobré rady

- Před zlomek, do kterého sčítáme, nedáváme mínus: $-\frac{2x-1}{x+1} + \frac{x^2}{x+1} = \frac{-(2x-1) + x^2}{x+1}$.
- Složitě lomené výrazy opisovat celé.
- Po násobení a dělení neroznásobovat závorky, ale snažit se co nejvíce pokrátit.

Př. 1: Urči definiční obor výrazů.

a) $\frac{3-x}{x+2}$ b) $\frac{x^2+x}{x^2-7x+12}$ c) $\frac{1}{\frac{x^2+y^2}{2+x} \cdot \frac{1}{a^2-b^2}}$

a) $\frac{3-x}{x+2} \quad x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$

b) $\frac{x^2+x}{x^2-7x+12} = \frac{x^2+x}{(x-4)(x-3)}$ ve jmenovateli násobíme dvě čísla, ani jedno z nich nesmí být nula:

- $x-4 \neq 0 \Rightarrow x \neq 4$,
- $x-3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$.

c) $\frac{\frac{1}{\frac{x^2+y^2}{2+x} \cdot \frac{1}{a^2-b^2}}}{\frac{x^2+y^2}{2+x} \cdot \frac{1}{a^2-b^2}}$

- $x^2+y^2 \neq 0, x^2 \geq 0, y^2 \geq 0 \Rightarrow$ proměnné x a y se najednou nesmí rovnat nule (píše se $[x; y] \neq [0; 0]$),
- $2+x \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$,
- $a^2-b^2 = (a-b)(a+b) \neq 0 \Rightarrow a \neq b; a \neq -b$

Př. 2: Doplň čitatele a jmenovatele tak, aby se zlomky rovnaly.

a) $\frac{2xy}{z} = \frac{\quad}{3xz}$ b) $\frac{3a^2b}{4} = \frac{9a^3b^2}{\quad}$ c) $\frac{2}{a-b} = \frac{\quad}{a^2-b^2}$

a) $\frac{2xy}{z} = \frac{\quad}{3xz}$ po zkrácení musí ve jmenovateli pravého zlomku zůstat pouze $z \Rightarrow$ číselník pravého zlomku musí oproti čitateli levého obsahovat 3 a x :

$\frac{2xy}{z} = \frac{6x^2y}{3xz}$

b) $\frac{3a^2b}{4} = \frac{9a^3b^2}{\quad} \Rightarrow \frac{3a^2b}{4} = \frac{9a^3b^2}{12ab}$

c) $\frac{2}{a-b} = \frac{\quad}{a^2-b^2} \Rightarrow \frac{2}{a-b} = \frac{2(a+b)}{a^2-b^2}$

Pedagogická poznámka: Někteří žáci ihned nepoznají, že jde o rozšiřování zlomků.

V takovém případě se ptám, jak by mohla ze jmenovatele pravého zlomku zmizet písmena a čísla, která v levém zlomku nejsou.

Př. 3: Sečti zlomky.

$$a) \frac{2x}{3} + x - \frac{x-1}{x}$$

$$b) \frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{x^2-1}$$

a) Podmínky: $x \neq 0$.

$$\frac{2x}{3} + x - \frac{x-1}{x} = \frac{2x^2 + 3x^2 - 3(x-1)}{3x} = \frac{5x^2 - 3x + 3}{3x}$$

b) Podmínky: $x \neq 0$, $x \neq \pm 1$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{x^2-1} &= \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-1}{x(x-1)(x+1)} + \frac{x}{x(x-1)(x+1)} = \\ &= \frac{(x-1)+x}{x(x-1)(x+1)} = \frac{2x-1}{x(x-1)(x+1)} \end{aligned}$$

Př. 4: Zkrat'.

$$a) \frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$$

$$b) \frac{x^2+1}{x^2+2x+1}$$

$$c) \frac{x^2+x-12}{x^2+3x-4}$$

$$a) \frac{x^2-4x+4}{x^2-4} = \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)} = \frac{x-2}{x+2}$$

Podmínky: $x \neq \pm 2$.

$$b) \frac{x^2+1}{x^2+2x+1} = \frac{x^2+1}{(x+1)^2} \quad \text{- číselník nejde rozložit a není tedy co krátit.}$$

Podmínky: $x \neq -1$.

$$c) \frac{x^2+x-12}{x^2+3x-4} = \frac{(x+4)(x-3)}{(x-1)(x+4)} = \frac{x-3}{x-1}$$

Podmínky: $x \neq 1$, $x \neq -4$.

Př. 5: Spočti.

$$a) \frac{9-x^2}{x^2+1} \cdot \frac{x^3+x}{x^2+2x-15}$$

$$b) \frac{x^2+4x}{x+2} : \frac{x^2-16}{4x+8}$$

$$a) \frac{9-x^2}{x^2+1} \cdot \frac{x^3+x}{x^2+2x-15} = \frac{(3-x)(3+x)}{x^2+1} \cdot \frac{x(x^2+1)}{(x+5)(x-3)} = \frac{-x(x+3)}{x+5}$$

Podmínky: $x \neq -5$, $x \neq 3$.

$$b) \frac{x^2+4x}{x+2} : \frac{x^2-16}{4x+8} = \frac{(x+4)x}{x+2} \cdot \frac{4(x+2)}{(x-4)(x+4)} = \frac{4x}{x-4}$$

Podmínky: $x \neq -2$, $x \neq \pm 4$.

Př. 6: Napiš lomený výraz, který je definován za podmínek $x \neq 1$, $x \neq \pm 4$ a rovná se, výrazu $\frac{x-4}{x+4}$.

Výraz je definován za podmínek $x \neq 1$, $x \neq \pm 4 \Rightarrow$ obsahuje ve jmenovateli výrazy $(x-1)$, $x-4$ a $x+4 \Rightarrow$ musíme zadaný výraz těmito výrazy rozšířit.

$$\frac{x-4}{x+4} = \frac{(x-4)(x-4)(x-1)}{(x+4)(x-4)(x-1)}$$

Hodnota výrazu se nezmění, když ho rozšíříme libovolným nenulovým reálným číslem.

$$\frac{x-4}{x+4} = \frac{k(x-4)^2(x-1)}{k(x+4)(x-4)(x-1)}; k \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Př. 7: Zjednoduš.

$$\text{a) } \frac{x - \frac{4}{x}}{x + \frac{8}{x-6}}$$

$$\text{b) } \frac{2x}{x+1} - x + 2 + \frac{1}{2-x}$$

$$\text{c) } \frac{2x^3 + x^2 - x}{x^3 + 4x^2 + 3x}$$

$$\text{a) } \frac{x - \frac{4}{x}}{x + \frac{8}{x-6}} = \frac{\frac{x^2-4}{x}}{\frac{x^2-6x+8}{x-6}} = \frac{(x^2-4)(x-6)}{x(x^2-6x+8)} = \frac{(x-2)(x+2)(x-6)}{x(x-4)(x-2)} = \frac{(x+2)(x-6)}{x(x-4)}$$

Podmínky: $x \neq 0$, $x \neq 4$, $x \neq 2$, $x \neq 6$.

b) Podmínky: $x \neq -1$, $x \neq 2$.

$$\begin{aligned} \frac{2x}{x+1} - x + 2 + \frac{1}{2-x} &= \frac{2x(2-x) - x(x+1)(2-x) + 2(x+1)(2-x) + x+1}{(x+1)(2-x)} = \\ &= \frac{4x - 2x^2 - (x^2+x)(2-x) + 2(2x-x^2+2-x) + x+1}{(x+1)(2-x)} = \\ &= \frac{4x - 2x^2 - (2x^2 - x^3 + 2x - x^2) + 2x - 2x^2 + 4 + x+1}{(x+1)(2-x)} = \frac{x^3 - 5x^2 + 5x + 5}{(x+1)(2-x)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{2x^3 + x^2 - x}{x^3 + 4x^2 + 3x} &= \frac{x(2x^2 + x - 1)}{x(x^2 + 4x + 3)} = \frac{x^2 + x + x^2 - 1}{x^2 + 4x + 3} = \frac{x(x+1) + (x-1)(x+1)}{(x+3)(x+1)} = \\ &= \frac{(x+1)(x+x-1)}{(x+3)(x+1)} = \frac{2x-1}{x+3} \end{aligned}$$

Podmínky: $x \neq -3$, $x \neq -1$.

