1.9.7 Lomené výrazy - shrnutí

Předpoklady: 010906

Důležité znalosti

- Lomené výrazy jsou v zásadě zlomky a proto s nimi pracujeme podobně jako se zlomky.
    - $\frac{1}{2} \pm \frac{3}{5} = \frac{1 \cdot 5 \pm 3 \cdot 2}{2 \cdot 5} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} \pm \frac{V_3}{V_4} = \frac{V_1 \cdot V_4 \pm V_3 \cdot V_2}{V_2 \cdot V_4}$; $V_2 \neq 0; V_4 \neq 0$.
    - $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 5} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{V_3}{V_4} = \frac{V_1 \cdot V_3}{V_2 \cdot V_4}$; $V_2 \neq 0; V_4 \neq 0$.
    - $\left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2^k}{3^k} \Rightarrow \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^k = \frac{V_1^k}{V_2^k}$; $V_2 \neq 0$.
    - $\frac{1}{2} : \frac{3}{5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 3} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} : \frac{V_3}{V_4} = \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{V_4}{V_3} = \frac{V_1 \cdot V_4}{V_2 \cdot V_3}$; $V_2 \neq 0; V_3 \neq 0; V_4 \neq 0$.
    - $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{2} : \frac{3}{5} = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 3} \Rightarrow \frac{\frac{V_1}{V_2}}{\frac{V_3}{V_4}} = \frac{V_1}{V_2} : \frac{V_3}{V_4} = \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{V_4}{V_3} = \frac{V_1 \cdot V_4}{V_2 \cdot V_3}$; $V_2 \neq 0; V_3 \neq 0; V_4 \neq 0$.
- Nulou nelze dělit $\Rightarrow$ u všech jmenovatelů bychom měli zapsat podmínku.
- Hlavní zlomková čára se píše do stejné úrovně jako znaménka.

Zádrhele

- Podmínka je dána konkrétním jmenovatelem a nedá se napsat bez jeho prostudování.
- Mínus před zlomkem patří všem členům v čitateli:
  $-\frac{x-1}{x+1} = -\frac{x}{x+1} - \frac{-1}{x+1} = \frac{-x}{x+1} + \frac{+1}{x+1}$
- Ne vždy můžeme rozšířit na libovolný jmenovatel (společný jmenovatel, ale najdeme vždy).

Dobré rady

- Před zlomek, do kterého sčítáme, nedáváme mínus: $-\frac{2x-1}{x+1} + \frac{x^2}{x+1} = \frac{-(2x-1)+x^2}{x+1}$.
- Složité lomené výrazy opisovat celé.
- Po násobení a dělení neroznásobovat závorky, ale snažit se co nejvíce pokrátit.

Př. 1: Urči definiční obor výrazů.

a) $\frac{3-x}{x+2}$ b) $\frac{x^2+x}{x^2-7x+12}$ c) $\frac{\frac{1}{x^2+y^2}}{\frac{2+x}{a^2-b^2}}$

a) $\frac{3-x}{x+2}$ $x+2\neq 0 \Rightarrow x\neq -2$

b) $\frac{x^2+x}{x^2-7x+12}=\frac{x^2+x}{(x-4)(x-3)}$ ve jmenovateli násobíme dvě čísla, ani jedno z nich nesmí být nula:

- $x-4\neq 0 \Rightarrow x\neq 4$,
- $x-3\neq 0 \Rightarrow x\neq 3$.

c) $\frac{\frac{1}{x^2+y^2}}{\frac{2+x}{a^2-b^2}}$

- $x^2+y^2\neq 0$, $x^2\geq 0$, $y^2\geq 0$ $\Rightarrow$ proměnné x a y se najednou nesmí rovnat nule (píše se $[x;y]\neq[0;0]$),
- $2+x\neq 0 \Rightarrow x\neq -2$,
- $a^2-b^2=(a-b)(a+b)\neq 0 \Rightarrow a\neq b; a\neq -b$

Př. 2: Doplň čitatele a jmenovatele tak, aby se zlomky rovnaly.

a) $\frac{2xy}{z}=\frac{\quad}{3xz}$ b) $\frac{3a^2b}{4}=\frac{9a^3b^2}{\quad}$ c) $\frac{2}{a-b}=\frac{\quad}{a^2-b^2}$

a) $\frac{2xy}{z}=\frac{\quad}{3xz}$ po zkrácení musí ve jmenovateli pravého zlomku zbýt pouze z $\Rightarrow$ čitatel pravého zlomku musí oproti čitateli levého obsahovat 3 a x: $\frac{2xy}{z}=\frac{6x^2y}{3xz}$.

b) $\frac{3a^2b}{4}=\frac{9a^3b^2}{\quad} \Rightarrow \frac{3a^2b}{4}=\frac{9a^3b^2}{12ab}$

c) $\frac{2}{a-b}=\frac{\quad}{a^2-b^2} \Rightarrow \frac{2}{a-b}=\frac{2(a+b)}{a^2-b^2}$

Pedagogická poznámka: Někteří žáci ihned nepoznají, že jde o rozšiřování zlomků. V takovém případě se ptám, jak by mohly ze jmenovatele pravého zlomku zmizet písmena a čísla, která v levém zlomku nejsou.

Př. 3: Sečti zlomky.

a) $\frac{2x}{3}+x-\frac{x-1}{x}$ b) $\frac{1}{x^2+x}+\frac{1}{x^2-1}$

a) Podmínky: $x \neq 0$.

$$\frac{2x}{3}+x-\frac{x-1}{x}=\frac{2x^2+3x^2-3(x-1)}{3x}=\frac{5x^2-3x+3}{3x}$$

b) Podmínky: $x \neq 0$, $x \neq \pm 1$.

$$\frac{1}{x^2+x}+\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x-1)(x+1)}=\frac{x-1}{x(x-1)(x+1)}+\frac{x}{x(x-1)(x+1)}=$$

$$=\frac{(x-1)+x}{x(x-1)(x+1)}=\frac{2x-1}{x(x-1)(x+1)}$$

Př. 4: Zkrať.

a) $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$ b) $\frac{x^2+1}{x^2+2x+1}$ c) $\frac{x^2+x-12}{x^2+3x-4}$

a) $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}=\frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)}=\frac{x-2}{x+2}$

Podmínky: $x \neq \pm 2$.

b) $\frac{x^2+1}{x^2+2x+1}=\frac{x^2+1}{(x+1)^2}$ - čitatel nejde rozložit a není tedy co krátit.

Podmínky: $x \neq -1$.

c) $\frac{x^2+x-12}{x^2+3x-4}=\frac{(x+4)(x-3)}{(x-1)(x+4)}=\frac{x-3}{x-1}$

Podmínky: $x \neq 1$, $x \neq -4$.

Př. 5: Spočti.

a) $\frac{9-x^2}{x^2+1}\cdot\frac{x^3+x}{x^2+2x-15}$ b) $\frac{x^2+4x}{x+2}:\frac{x^2-16}{4x+8}$

a) $\frac{9-x^2}{x^2+1}\cdot\frac{x^3+x}{x^2+2x-15}=\frac{(3-x)(3+x)}{x^2+1}\cdot\frac{x(x^2+1)}{(x+5)(x-3)}=\frac{-x(x+3)}{x+5}$

Podmínky: $x \neq -5$, $x \neq 3$.

b) $\frac{x^2+4x}{x+2}:\frac{x^2-16}{4x+8}=\frac{(x+4)x}{x+2}\cdot\frac{4(x+2)}{(x-4)(x+4)}=\frac{4x}{x-4}$

Podmínky: $x \neq -2$, $x \neq \pm 4$.

Př. 6: Napiš lomený výraz, který je definován za podmínek $x \neq 1$, $x \neq \pm 4$ a rovná se, výrazu $\frac{x-4}{x+4}$.

Výraz je definován za podmínek $x \neq 1$, $x \neq \pm 4$ $\Rightarrow$ obsahuje ve jmenovateli výrazy $(x-1)$, $x-4$ a $x+4$ $\Rightarrow$ musíme zadaný výraz těmito výrazy rozšířit.

$$\frac{x-4}{x+4} = \frac{(x-4)(x-4)(x-1)}{(x+4)(x-4)(x-1)}$$

Hodnota výrazu se nezmění, když ho rozšíříme libovolným nenulovým reálným číslem.

$$\frac{x-4}{x+4} = \frac{k(x-4)^2(x-1)}{k(x+4)(x-4)(x-1)}; k \in R - \{0\}$$

Př. 7: Zjednoduš.

a) $\dfrac{x - \frac{4}{x}}{x + \frac{8}{x-6}}$ b) $\dfrac{2x}{x+1} - x + 2 + \dfrac{1}{2-x}$ c) $\dfrac{2x^3 + x^2 - x}{x^3 + 4x^2 + 3x}$

a) $$\frac{x - \frac{4}{x}}{x + \frac{8}{x-6}} = \frac{\frac{x^2-4}{x}}{\frac{x^2-6x+8}{x-6}} = \frac{(x^2-4)(x-6)}{x(x^2-6x+8)} = \frac{(x-2)(x+2)(x-6)}{x(x-4)(x-2)} = \frac{(x+2)(x-6)}{x(x-4)}$$

Podmínky: $x \neq 0$, $x \neq 4$, $x \neq 2$, $x \neq 6$.

b) Podmínky: $x \neq -1$, $x \neq 2$.

$$\frac{2x}{x+1} - x + 2 + \frac{1}{2-x} = \frac{2x(2-x) - x(x+1)(2-x) + 2(x+1)(2-x) + x + 1}{(x+1)(2-x)} =$$

$$= \frac{4x - 2x^2 - (x^2+x)(2-x) + 2(2x - x^2 + 2 - x) + x + 1}{(x+1)(2-x)} =$$

$$= \frac{4x - 2x^2 - (2x^2 - x^3 + 2x - x^2) + 2x - 2x^2 + 4 + x + 1}{(x+1)(2-x)} = \frac{x^3 - 5x^2 + 5x + 1}{(x+1)(2-x)}$$

c) $$\frac{2x^3 + x^2 - x}{x^3 + 4x^2 + 3x} = \frac{x(2x^2 + x - 1)}{x(x^2 + 4x + 3)} = \frac{x^2 + x + x^2 - 1}{x^2 + 4x + 3} = \frac{x(x+1) + (x-1)(x+1)}{(x+3)(x+1)} =$$

$$= \frac{(x+1)(x + x - 1)}{(x+3)(x+1)} = \frac{2x-1}{x+3}$$

Podmínky: $x \neq -3$, $x \neq -1$.

Př. 8: Zjednoduš $\dfrac{1+\dfrac{1-\dfrac{x+\frac{1}{x}}{x}}{x}}{\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x+\frac{1}{x}}}}}$.

$$\frac{1+\dfrac{1-\dfrac{x+\frac{1}{x}}{x}}{x}}{\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x+\frac{1}{x}}}}}=\frac{1+\dfrac{1-\dfrac{\frac{x^2+1}{x}}{x}}{x}}{\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\frac{x^2+1}{x}}}}}=\frac{1+\dfrac{1-\dfrac{x^2+1}{x^2}}{x}}{\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{x^2+1}}}}=\frac{1+\dfrac{\frac{x^2-x^2-1}{x^2}}{x}}{\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\frac{x^2+1+x}{x^2+1}}}}=\frac{1+\dfrac{-1}{x^3}}{\dfrac{1}{1-\dfrac{x^2+1}{x^2+x+1}}}=$$

$$=\frac{\dfrac{x^3-1}{x^3}}{\dfrac{1}{\dfrac{x^2+x+1-x^2-1}{x^2+x+1}}}=\frac{\dfrac{x^3-1}{x^3}}{\dfrac{x^2+x+1}{x}}=\frac{\left(x^3-1\right)x}{x^3\left(x^2+x+1\right)}=\frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{x^2\left(x^2+x+1\right)}=\frac{x-1}{x^2}$$

Podmínky: $x\neq 0$, $x^2+x+1\neq 0$.
Co vyplývá z podmínky $x^2+x+1\neq 0$ pro *x*? Zjišťujeme, kdy výraz $x^2+x+1=0$ $\Rightarrow$ kvadratická rovnice.

$x^2+x+1=0$

$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1}=\dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2\cdot 1}$ $\Rightarrow$ rovnice $x^2+x+1=0$ nemá řešení $\Rightarrow$ výraz x^2+x+1 se nikdy nerovná nule $\Rightarrow$ jediná podmínka $x\neq 0$.

Dodatek: Zadání do Wolframalpha pro kontrolu (1+(1-(x+1/x)/x)/x)/(1/(1-1/(1+1/(x+1/x)))).

Shrnutí: Lomené výrazy představují zlomky a podle toho s nimi pracujeme.