

1.9.5 Vyjádření neznámé ze vzorce V

Předpoklady: 1904

Pedagogická poznámka: Tato kapitola není na rozdíl od předchozích tří fyzikální. Jde v ní o to, aby studenti výraz, ze kterého budou vyjadřovat, nejdříve sami sestavili. Samozřejmě jde o opakování látky probírané už dříve (v kapitole o mnohočlenech), ale vzhledem k tomu, že sestavování výrazů dělá studentům snad největší problémy, nepovažuji je za zbytečné. V případě spěchu je tato hodina jedním z prvních kandidátů na vynechání.

Př. 1: Cesta z A do B vede nejprve d_1 km do kopce a potom d_2 z kopce.

a) Urči průměrnou rychlost auta jedoucího z A do B, jestliže do kopce jede rychlostí v_1 a z kopce rychlostí v_2 .

b) Z odvozeného vzorce pro průměrnou rychlost vyjádři vzdálenost d_2 .

c) Z odvozeného vzorce pro průměrnou rychlost vyjádři rychlost v_1 .

a)

$$\text{průměrná rychlost: } v = \frac{\text{celková dráha}}{\text{celkový čas}} = \frac{d}{t} = \frac{d_1 + d_2}{t_1 + t_2}$$

$$\text{Dosadíme: } t_1 = \frac{d_1}{v_1}, t_2 = \frac{d_2}{v_2}$$

$$v = \frac{\frac{d_1 + d_2}{\frac{d_1}{v_1} + \frac{d_2}{v_2}}}{\frac{d_1 v_2 + d_2 v_1}{v_1 \cdot v_2}} = \frac{v_1 \cdot v_2 (d_1 + d_2)}{d_1 \cdot v_2 + d_2 v_1}$$

b)

$$v = \frac{v_1 \cdot v_2 (d_1 + d_2)}{d_1 \cdot v_2 + d_2 v_1} \quad \cdot (d_1 \cdot v_2 + d_2 v_1) \quad \text{zlikvidujeme zlomky, ve kterých je potřebná}$$

veličina

$$v \cdot (d_1 v_2 + d_2 v_1) = v_1 v_2 \cdot (d_1 + d_2) \quad \text{roznásobíme závorky, ve kterých je } d_2$$

$$v d_1 v_2 + v d_2 v_1 = v_1 v_2 d_1 + v_1 v_2 d_2 \quad \text{vše s } d_2 \text{ na jednu stranu, zbytek na druhou}$$

$$v v_1 d_2 - v_1 v_2 d_2 = v_1 v_2 d_1 - v v_2 d_1 \quad \text{vytkneme } d_2$$

$$d_2 (v v_1 - v_1 v_2) = v_1 v_2 d_1 - v v_2 d_1 \quad \text{závorkou vydělíme}$$

$$d_2 = \frac{v_1 v_2 d_1 - v v_2 d_1}{v v_1 - v_1 v_2}$$

c)

$$v = \frac{v_1 \cdot v_2 (d_1 + d_2)}{d_1 \cdot v_2 + d_2 v_1} \quad \cdot (d_1 \cdot v_2 + d_2 v_1) \quad \text{zlikvidujeme zlomky, ve kterých je potřebná}$$

veličina

$$v \cdot (d_1 v_2 + d_2 v_1) = v_1 v_2 \cdot (d_1 + d_2) \quad \text{roznásobíme závorky, ve kterých je } v_1$$

$$v d_1 v_2 + v d_2 v_1 = v_1 v_2 d_1 + v_1 v_2 d_2 \quad \text{vše s } v_1 \text{ na jednu stranu, zbytek na druhou}$$

$$v d_1 v_2 = v_1 v_2 d_1 + v_2 v_1 d_2 - v_1 d_2 v \quad \text{vytkneme } v_1$$

$$vd_1v_2 = v_1(v_2d_1 + v_2d_2 - vd_2) \quad \text{závorkou vydělíme}$$

$$v_1 = \frac{vd_1v_2}{v_2d_1 + v_2d_2 - vd_2}$$

Př. 2: l kusů zboží stálo před zdražením x Kč. Po zdražení bylo za m kusů nutné zaplatit y Kč.

- Najdi výraz, který udává o kolik procent zboží zdražilo (použij proměnnou p).
- Výraz uprav do co nejjednoduššího tvaru.
- Z výrazu vyjádři proměnné m a y .

a)

Srovnáváme ceny \Rightarrow musíme vypočítat ceny za jeden kus zboží před a po zdražení.

Původní cena za jeden kus zboží: $\frac{\text{cena}}{\text{počet kusů}} = \frac{x}{l}$

Nová cena za jeden kus zboží: $\frac{\text{cena}}{\text{počet kusů}} = \frac{y}{m}$

Zdražení: $\text{nová cena} - \text{stará cena} = \frac{y}{m} - \frac{x}{l}$

Máme vyjádřit zdražení vzhledem k původní ceně:

$$100\% \quad \frac{x}{l}$$

\Rightarrow přímá úměrnost

$$1\% \quad \frac{x}{100l}$$

$$p\% \quad \frac{y}{m} - \frac{x}{l}$$

$$\frac{p}{1} = p = \frac{\frac{y}{m} - \frac{x}{l}}{\frac{x}{100l}}$$

b) Upravujeme výraz:

$$p = \frac{\frac{y}{m} - \frac{x}{l}}{\frac{x}{100l}} = \frac{\frac{ly - mx}{ml}}{\frac{x}{100l}} = \frac{100l(ly - mx)}{mxl} = \frac{100(ly - mx)}{mx}$$

c) vyjadřujeme m :

$$p = \frac{100(ly - mx)}{mx} \quad / \cdot mx$$

$$pmx = 100ly - 100mx \quad / + 100mx$$

$$pmx + 100mx = 100ly$$

$$m(px + 100x) = 100ly \quad / : (px + 100x)$$

$$m = \frac{100ly}{px + 100x}$$

vyjadřujeme y :

$$p = \frac{100(l y - m x)}{m x} \quad / \cdot m x$$

$$p m x = 100 l y - 100 m x \quad / + 100 m x$$

$$p m x + 100 m x = 100 l y \quad / : 100 l$$

$$\frac{p m x + 100 m x}{100 l} = y$$

Př. 3: Na stavbě pracuje n dělníků, z nich každý má odpracovat celkem h hodin v d dnech. Po dvou dnech dva dělníci onemocněli.

a) Kolik hodin musí ještě odpracovat každý ze zbývajících dělníků, aby byla stavba hotová? (Odpracoval se plánovaný počet hodin.)

b) Z výsledného zjednodušeného výrazu vyjádři původní počet dělníků n .

Sestavujeme postupně:

$$\text{odpracovat každý dělník} = \frac{\text{zbývající práce}}{\text{počet zbylých dělníků}}$$

$$\text{počet zbylých dělníků} = n - 2$$

$$\text{zbývající práce} = \text{všechna práce} - \text{práce hotová do onemocnění}$$

$$\text{všechna práce} = n \cdot h$$

$$\text{práce hotová do onemocnění} = 2 \text{dny} \cdot \text{práce na jeden den}$$

$$\text{práce na jeden den} = \frac{\text{všechna práce}}{\text{počet dní}} = \frac{nh}{d}$$

Začneme zpětně dosazovat:

$$\text{práce hotová do onemocnění} = 2 \text{dny} \cdot \text{práce na jeden den} = 2 \frac{nh}{d}$$

$$\text{zbývající práce} = \text{všechna práce} - \text{práce hotová do onemocnění} = nh - \frac{2nh}{d}$$

$$\text{odpracovat každý dělník} = \frac{\text{zbývající práce}}{\text{počet zbylých dělníků}} = \frac{nh - \frac{2nh}{d}}{n - 2}$$

$$x = \frac{nh - \frac{2nh}{d}}{n - 2} = \frac{\frac{nhd - 2nh}{d}}{n - 2} = \frac{nhd - 2nh}{d(n - 2)} = \frac{nh(d - 2)}{d(n - 2)}$$

b) vyjadřujeme n

$$x = \frac{nh(d - 2)}{d(n - 2)} \quad / \cdot d(n - 2)$$

$$x d (n - 2) = nh (d - 2)$$

$$x d n - 2 x d = n h d - 2 n h$$

$$x d n + 2 n h - n h d = 2 x d$$

$$n (x d + 2 h - h d) = 2 x d$$

$$n = \frac{2 x d}{x d + 2 h - h d}$$

Shrnutí: Stejným způsobem, jakým vyjadřujeme z fyzikálních vzorců, vyjadřujeme z libovolného jiného vztahu.