2.1.2 Kartézský součin

Předpoklady:

Co znamená záhadný nadpis, nám řekne definice:

Kartézský součin množin *A*, *B*:
Jsou dány množiny *A*, *B*. Kartézský součin $A \times B$ je množina všech uspořádaných dvojic $[x, y]$, kde $x \in A, y \in B$.

Tím víme všechno potřebné a začneme řešit příklady.

Př. 1: Jsou dány množiny $A = \{a; b\}$, $B = \{0; 1; \pi\}$.
a) Sestroj kartézský součin $A \times B$.
b) Sestroj kartézský součin $A \times A$.

a) kartézský součin $A \times B$.
Jde o analýzu textu, tedy čtení. Postupuju podle definice:
Kartézský součin $A \times B$ je množina $\Rightarrow$ $A \times B = \{\ \}$
teď musíme najít prvky:
množina uspořádaných dvojic $[x, y]$, kde $x \in A, y \in B$ $\Rightarrow$ sestavujeme dvojice $[\ ,\ ]$

- první je něco z *A* $\Rightarrow [a,\ \ ]$
- druhé něco z *B* $\Rightarrow [a, 0]$

Máme sestavit všechny dvojice $\Rightarrow$ $A \times B = \{[a,0],[a,1],[a,\pi],[b,0],[b,1],[b,\pi]\}$

b) kartézský součin $A \times A$.
Stejné jako předtím, ale i na druhé místo vybíráme z *A*.
$A \times A \{[a,a],[a,b],[b,a],[b,b]\}$

Poznámka: Při sestavování dvojice je dobré postupovat systematicky, abychom na něco nezapomněli.

Pedagogická poznámka: Hodně studentů bude chtít definici na příkladě vysvětlit. Vysvětlení se jim samozřejmě dostane, ale nejdřív je nutné, aby sami zkusili text rozebrat a najít odpověď. I špatný pokus má cenu, protože se z něj dá usoudit na to, co špatně přečetli nebo špatně pochopili. Navíc zkušenosti ukazují, že většina těch, kteří to nakonec zkusí, vyřeší příklad i bez vysvětlování správně (největším problém je většinou právě „pokoušení se“).

Př. 2: Je dán kartézský součin $C \times D = \{[1,2],[1,3],[0,2][0,3]\}$. Urči množiny *C*, *D*.

Množinu *C* tvoří všechny čísla, která jsou v kartézském součinu na prvním místě, množinu *D* ta na druhém $\Rightarrow C = \{1, 0\}$, $D = \{2, 3\}$.

Př. 3: Je dána množina $M = \{[1,1],[1,2],[3,2]\}$. Je tato množina kartézským součinem $E \times F$ množin *E*, *F*?

Množina není kartézským součinem. Prvek 1 se vyskytuje ve dvou uspořádaných dvojicích. Druhá množina tedy musí obsahovat minimálně dva prvky, ale prvek 3 z první množiny se v množině *M* vyskytuje pouze v jedné uspořádané dvojici.

Př. 4: Doplň množinu *M* z předchozího příkladu co nejmenším počtem prvků tak, aby doplněná množina byla kartézským součinem $E \times F$ množin *E*, *F*.

V množině chybí druhá uspořádaná dvojice prvku 3 - $[3,1]$.

$E = \{1,3\}$, $F = \{1,2\}$

Př. 5: Množina *G* má pět prvků, množina *H* má 10 prvků. Kolik prvků má kartézský součin množin $G \times H$?

Ke každému prvku z *G* musíme vytvořit dvojice se všemi prvky z *H*, tedy 10 dvojic ke každému prvku z *G*, dohromady $5 \cdot 10 = 50$ dvojic.

Pedagogická poznámka: Následující definici by měli studenti sestavit sami. Pomozte jim pouze s tím, že si mají procházet definici kartézského součinu $A \times B$ a měnit text dle potřeby. Při kontrole je pak lepší sestavit definici na tabuli dynamicky než ji jen promítnout na zeď.

Př. 6: Sestav definici kartézského součinu tří množin A_1, A_2, A_3.

Bereme původní definici a měníme části, které jsou přímo navázány na dvojici množin *A*, *B*.

Kartézský součin $A \times B$ je množina všech uspořádaných dvojic $[x, y]$, kde $x \in A, y \in B$.

Kartézský součin $A_1 \times A_2 \times A_3$ je množina všech uspořádaných **trojic** $[x, y, z]$, kde $x \in A_1, y \in A_2, z \in A_3$.

Trojice musíme sestavovat proto, abychom měli místo pro prvky ze třetí množiny A_3 (obě místa v působní dvojici byla obsazená).

Kartézský součin množin A_1, A_2, A_3:

Jsou dány množiny A_1, A_2, A_3. Kartézský součin $A_1 \times A_2 \times A_3$ je množina všech uspořádaných **trojic** $[x, y, z]$, kde $x \in A_1, y \in A_2, z \in A_3$.

Př. 7: Jsou dány množiny: $A_1 = \{1,2\}$, $A_2 = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right\}$, $A_3 = \{\sqrt{2}, \sqrt{6}\}$. Urči počet prvků kartézského součinu $A_1 \times A_2 \times A_3$. Urči kartézský součin $A_1 \times A_2 \times A_3$.

Všechny tři množiny mají po dvou prvcích $\Rightarrow$ 2 možnosti na první místo v trojici, dvě možnosti na druhé místo, ke každému na prvním místě a 2 možnosti na třetí místo, ke každé kombinaci na prvních dvou místech $\Rightarrow$ tedy $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ možností.

$A_1 \times A_2 \times A_3 =$
$$\left\{\left[1,\frac{1}{2},\sqrt{2}\right],\left[1,\frac{3}{4},\sqrt{6}\right],\left[1,\frac{3}{4},\sqrt{2}\right],\left[1,\frac{1}{2},\sqrt{6}\right]\left[2,\frac{1}{2},\sqrt{2}\right],\left[2,\frac{3}{4},\sqrt{6}\right],\left[2,\frac{1}{2},\sqrt{6}\right],\left[2,\frac{3}{4},\sqrt{2}\right]\right\}$$

Pedagogická poznámka: Někteří studenti mají tendenci přeskočit příklad 6 a řešit rovnou příklad 7 (zdá se jim konkrétnější). Často neuspějí, proto řešení příkladu sedm povoluji pouze těm, kteří už mají zkontrolovanou šestku.

Př. 8: Sestav definici kartézského součinu *n* množin $A_1, A_2, ..., A_n$.

Bereme původní definici a měníme části, které jsou přímo navázány na dvojici množin *A*, *B*.
Kartézský součin $A \times B$ je množina všech uspořádaných dvojic $[x, y]$, kde $x \in A, y \in B$.
Kartézský součin $A_1 \times A_2 \times ... A_n$ je množina všech uspořádaných **n-tic** $[a_1, a_2, ..., a_n]$, kde $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, ..., a_n \in A_n$.

Kartézský součin n množin:
Jsou dány množiny $A_1, A_2, ..., A_n$. Kartézský součin $A_1 \times A_2 \times .... \times A_n$ je množina všech uspořádaných **n-tic** $[a_1, a_2, ..., a_n]$, kde $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, ..., a_n \in A_n$.

Pedagogická poznámka: V definici kartézského součinu by bylo správnější psát „trojic $[a_1, a_2, a_3]$, ale studenti většinou píší definici tak, jak je uvedeno výše. Nechávám to tak a neupozorňuji na to, aby měli co řešit v příkladu 8. Diskuse o tom proč není možné psát *n*-tic $[x, y, ..., n]$ jsou určitě zajímavé.

Existují i kartézské součiny nekonečných množin, která pak nejdou zapsat výpisem.
Například kartézský součin $R \times R$ zobrazujeme jako rovinu (souřadnice bodů jsou uspořádané dvojice dvou reálných čísel)

Shrnutí: Kartézský součin je množinou všech uspořádaných *n*-tic sestavených z prvků množin součinu.