

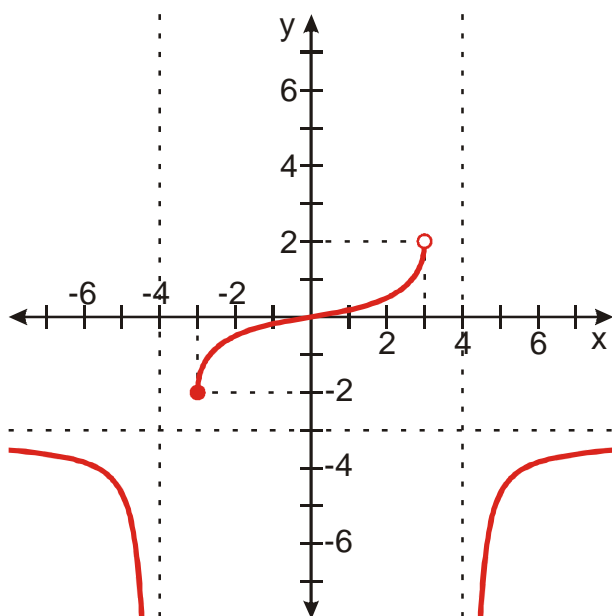
## 2.1.6 Graf funkce II

### Předpoklady: 2105

**Pedagogická poznámka:** Stejně jako u předchozí hodiny, dávám studentům vytištěné zadání s obrázkem, aby se mohli snáze orientovat a mohli pracovat rozdílným tempem. Horší studenti se určitě neobejdou bez pomoci učitele, který na rozdíl od učebnice může jezdit prstem v grafu a ukazovat dynamicky, co se děje.

**Př. 1:** Na obrázku je nakreslen graf funkce. Urči:

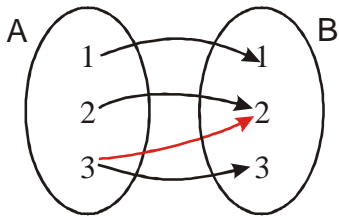
- $D(f)$ ,  $H(f)$ ,
- $f(-3)$ ,  $f(0)$ ,  $f(4)$ ,
- porovnej:  $f(-2)$   $f(1)$ ,  $f(-6)$   $f(6)$ ,  $f(-3)$   $f(4)$ ,
- všechna  $x$ , pro která platí  $f(x) > 0$ ,
- všechna  $y$ , ke kterým existují alespoň dvě  $x$  taková, že platí  $y = f(x)$ .



- $D(f) = (-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (4; \infty)$ ,  $H(f) = (-\infty; -3) \cup (-2; 2)$ .
- $f(-3) = -2$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f(4) = \emptyset$ .
- $f(-2) < f(1)$ ,  $f(-6) = f(6)$ ,  $f(-3) = f(4)$  - není možné srovnat,  $f(4)$  neexistuje.
- hledáme  $x$ , ze kterých se dostaneme ke kladné hodnotě (nad osu  $x$ )  $\Rightarrow x \in (0; 3)$ .
- hledáme  $y$ , ke kterým se dostaneme alespoň ze dvou bodů  $\Rightarrow y \in (-\infty; -3)$ .

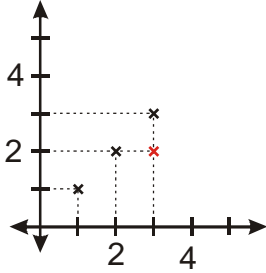
**Př. 2:** Nakresli množinový obrázek takové relace s definičním oborem  $A = \{1, 2, 3\}$  a oborem hodnot  $B = \{1, 2, 3\}$ , která není funkcí. Nakresli graf této relace a využij ho ke zformulování podmínky, kterou musí splňovat graf každé funkce.

Řešení je více (stačí, aby k jednomu  $x$  byly přiřazeny alespoň dvě hodnoty  $y$ ). Nakreslíme si takové, aby relace měla k funkci blízko (v obrázku bude jediné přiřazení, které to „kazí“, označíme si ho červeně):



<b>x</b>	1	2	3	3
<b>y</b>	1	2	3	2

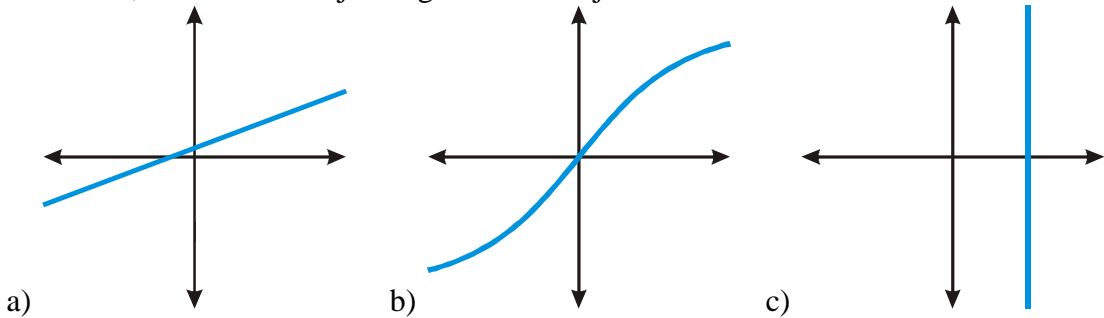
Číslo 3 má přiřazeno dvě hodnoty, relace není zobrazení a tedy ani funkce.

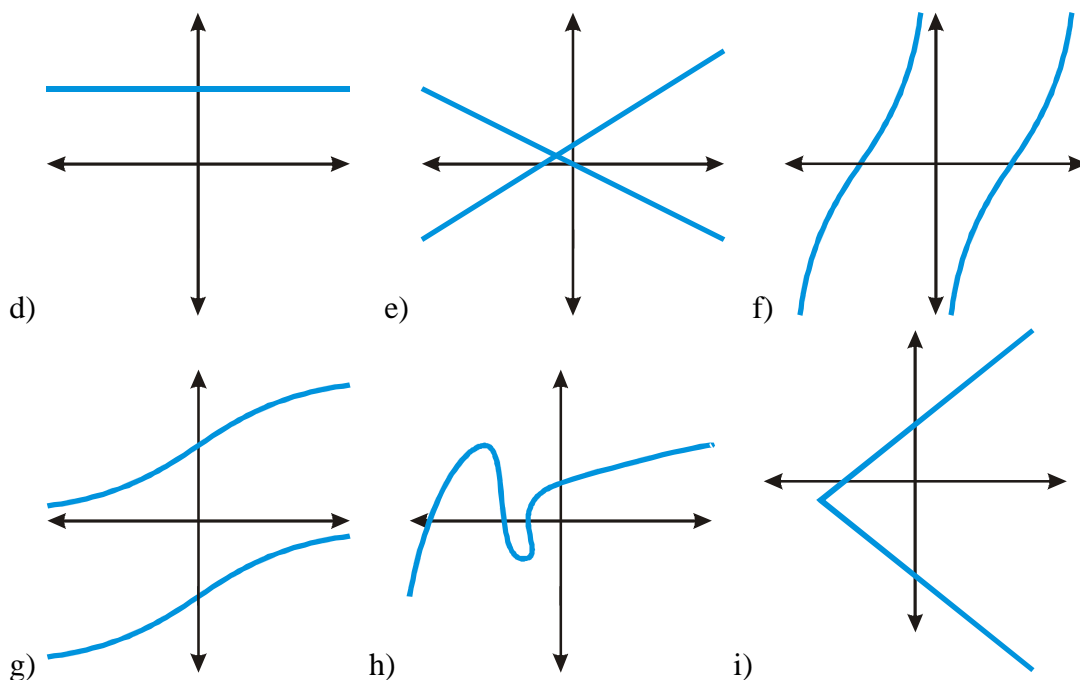


Pokud jsou jednomu  $x$  přiřazena dvě různá  $y$ , v grafu se objeví dva body nad sebou  $\Rightarrow$  **graf zobrazuje funkci, pokud se v něm nevyskytují žádné dva body nad sebou.**

**Pedagogická poznámka:** Předchozí příklad je dobrý pro nácvik strategie. Pokud necháte studenty samostatně nakreslit množinový obrázek objeví se dvě varianty. Část studentů kreslí podobné obrázky, jaký je v řešení. Druhá část pak nakreslí obrázky relací, které se od funkce liší velmi mnoho. Bavíme se pak o tom, která strategie je lepší. Cílem je dojít k tomu, že pokud chceme poznat, čím se graf funkce „zkazí“, měli bychom tam takových chyb mít co nejméně.

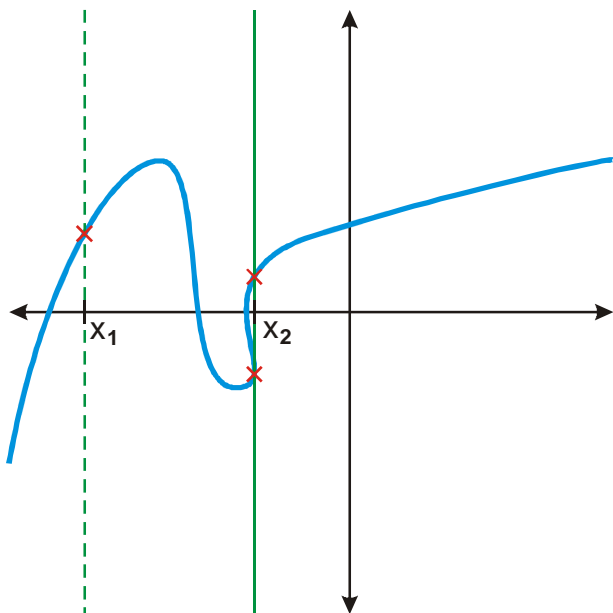
**Př. 3:** Rozhodni, které z následujících grafů zobrazují funkce.





Funkce musí každému  $x$  přiřazovat maximálně jedno  $y$ . Žádný z grafů nesmí mít dva body přímo nad sebou. (hodnoty pro  $x$  hledáme pomocí svislých přímek  $\Rightarrow$  žádná taková přímka se tedy nesmí protnout s grafem víc než jednou).

Například relace h) se pro  $x_1$  chová jako funkce, protože graf má pro  $x_1$  jedinou hodnotu, ale pro  $x_2$  má hodnoty dvě.



Protože podmínka musí být splněna pro všechna  $x$ , relace h) není funkce.

Grafy funkcí jsou na obrázcích a), b), d), f).

**Př. 4:** Grafy funkcí mají splňovat následující podmínky:

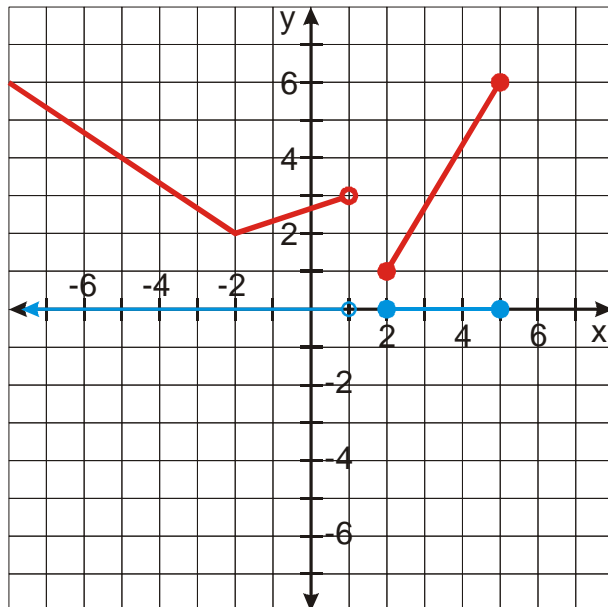
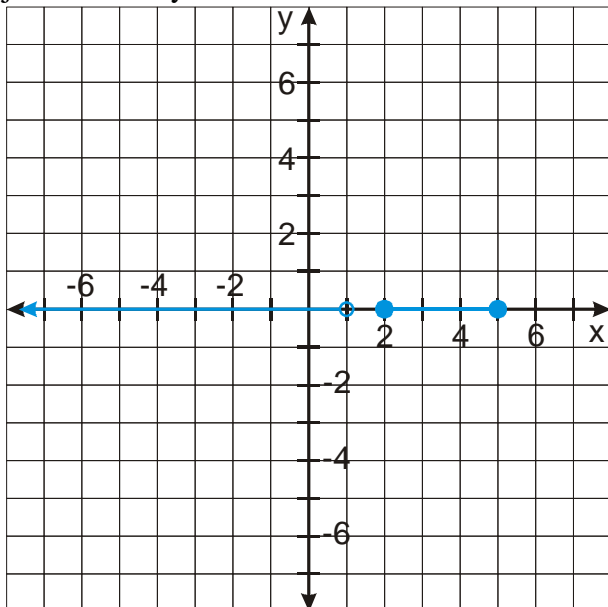
- a)  $D(f) = (-\infty; 1) \cup \langle 2; 5 \rangle$ ,      b)  $H(f) = (-1; \infty)$ ,      c)  $f(3) = 2$ ,  
d)  $f(3) < f(4)$ .

U každé jednotlivé podmínky nejdříve rozhodni, jaký vliv bude mít na graf funkce, a poté nakresli graf libovolné funkce, která tuto podmínku splňuje. Po nakreslení čtyř

grafů pro jednotlivé podmínky nakresli graf funkce, která splňuje všechny čtyři podmínky najednou.

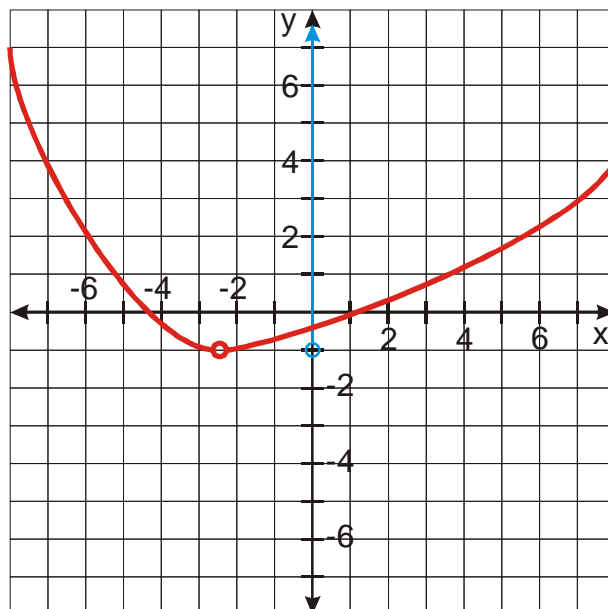
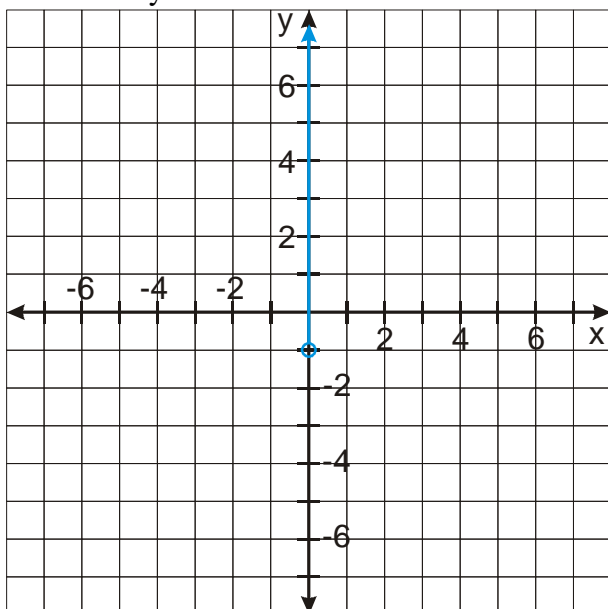
a)  $D(f) = (-\infty; 1) \cup \langle 2; 5 \rangle$

Graf funkce musí mít hodnotu  $y$  pro všechny vypsané hodnoty  $x$  (vyznačené na ose  $x$  modře), pro jiná  $x$  hodnoty mít nesmí.



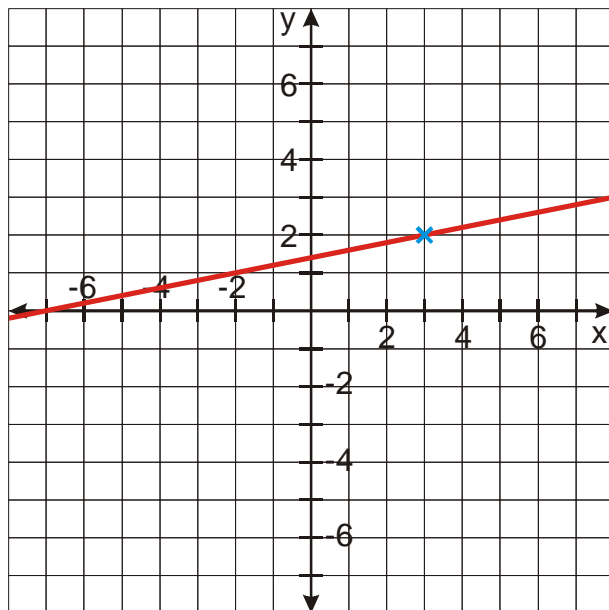
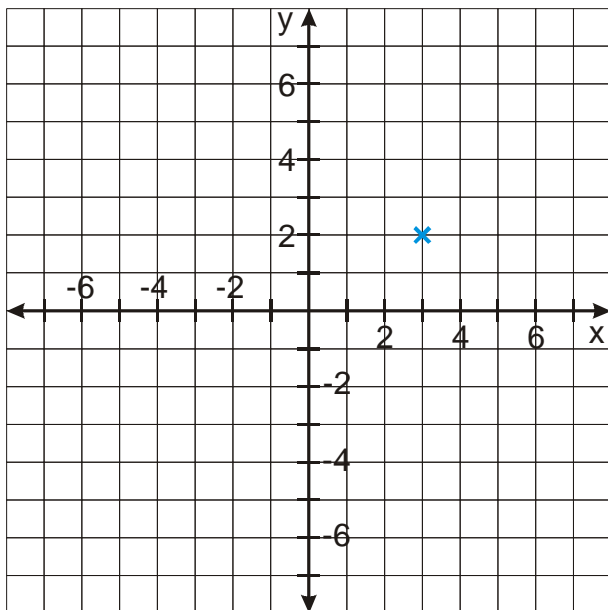
b)  $H(f) = (-1; \infty)$

Každé  $y$  z intervalu (vyznačené na ose  $y$  modře) musí být hodnotou pro libovolné  $x$ . Ostatní  $y$  hodnotou být nesmí.



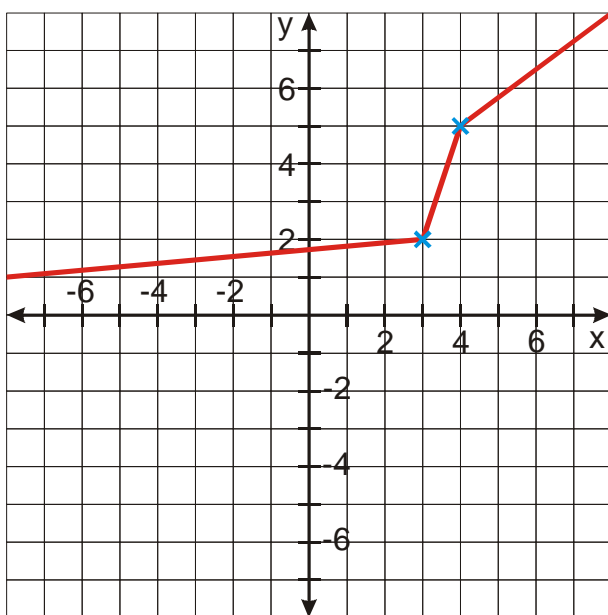
c)  $f(3) = 2$

Graf funkce musí procházet bodem  $[3; 2]$  (nakreslený modře)

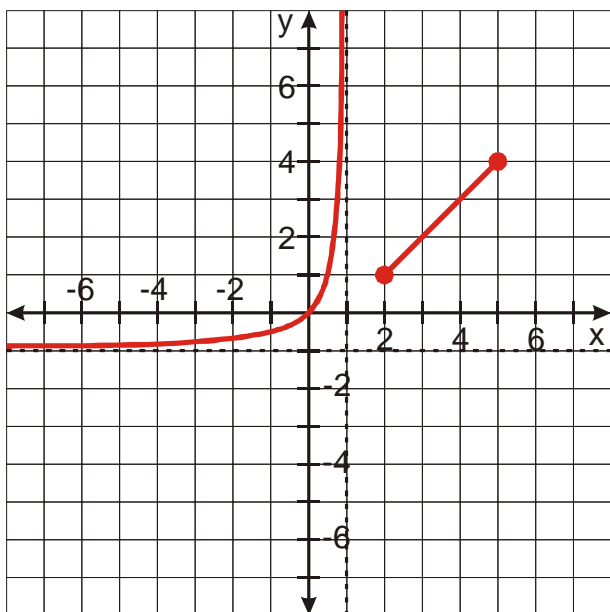


d)  $f(3) < f(4)$

Hodnota pro  $x_1 = 3$  musí být menší než pro  $x_2 = 4 \Rightarrow$  bod  $[3; ?]$  musí být níže než bod  $[4; ?]$ .



Možností, jak spojit všechny podmínky je mnoho, například tato funkce:

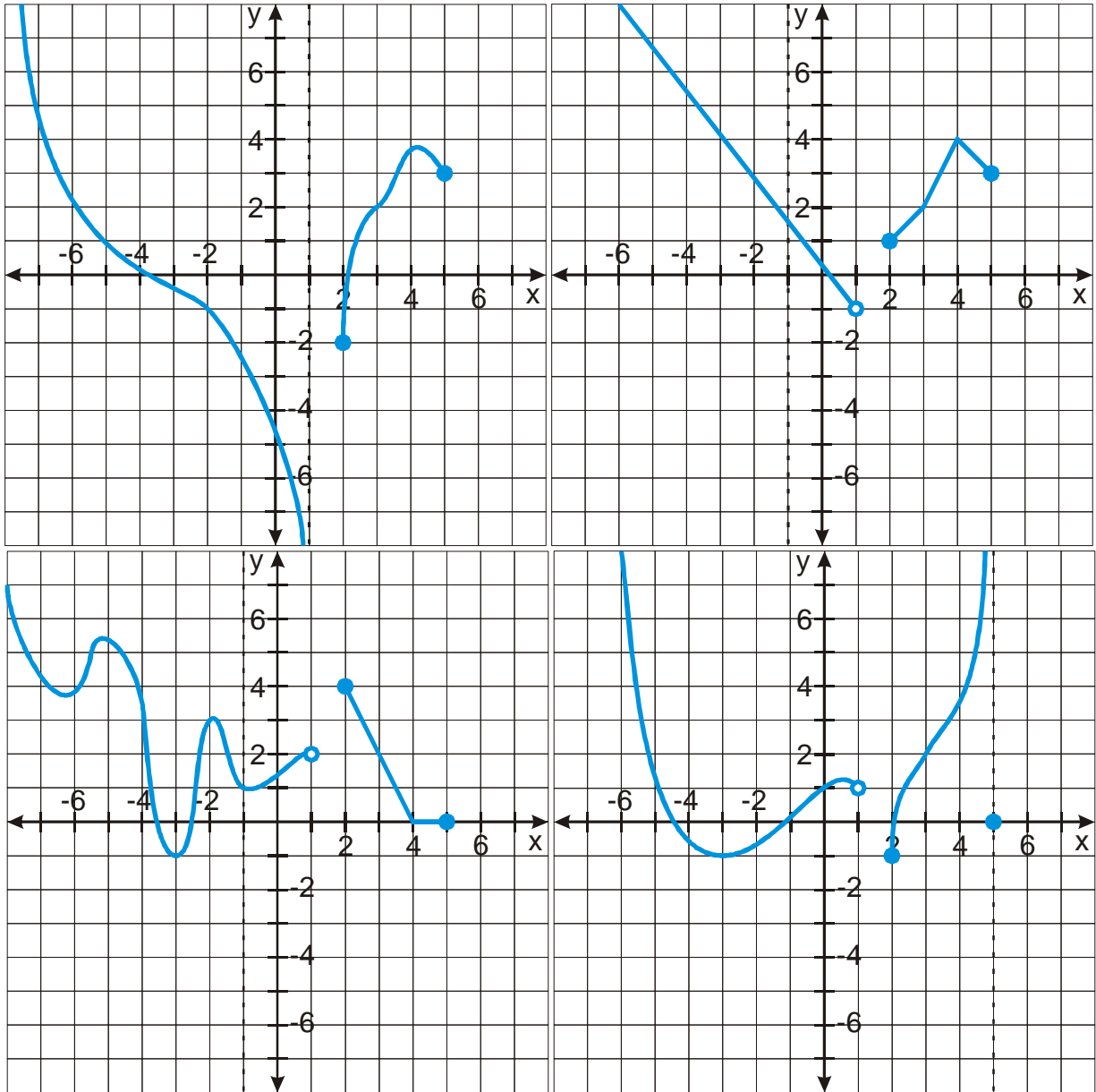


**Pedagogická poznámka:** S předchozí úlohou mají studenti obrovské problémy, které vyplývají zejména z toho, že nejsou během školní docházky konfrontováni s problémy, které mají více řešení (a poskytují jim tedy jistou volnost). Většina studentů je naučená, že problémy se řeší tak, že z paměti nebo ze sešitu opíšou předem schválené správné řešení, což v tomto případě samozřejmě nejde a to je přivádí do značných rozpaků.

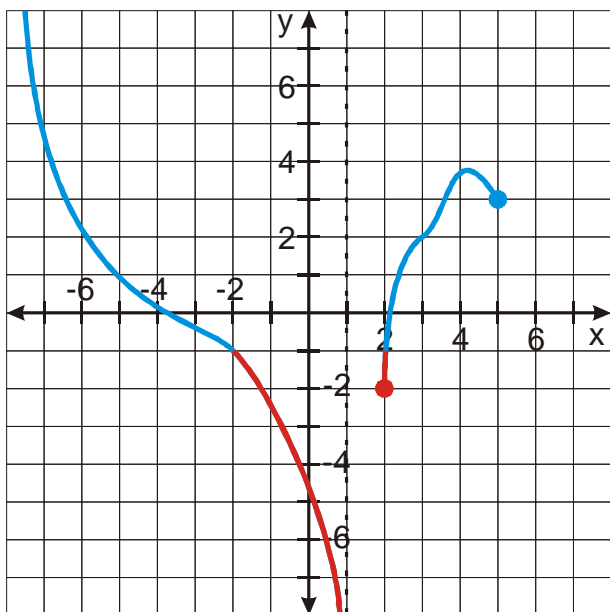
**Pedagogická poznámka:** Velkým problémem při řešení předchozího a následujícího příkladu je neschopnost opravovat vlastní chyby. Většina studentů v následujícím příkladu dokáže správně rozhodnout, zda graf splňuje zadané podmínky. U svého vlastního grafu však chybu nenajdou.

Řeším to tak, že po studentech požaduji, aby si své grafy nechali zkontrolovat od souseda. Soused zkontroluje správnost, pokud najde chybu, neukáže ji, pouze upozorní na existenci chyby. Upozorňuji studenty, aby se příště snažili být k sobě kritičtější a předem nepředpokládali, že úkol vyřešili správně.

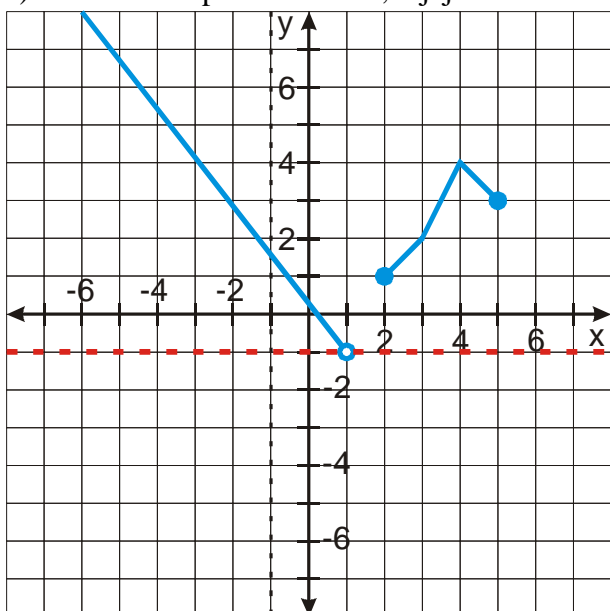
- Př. 5:** Rozhodni, které z funkcí na následujících grafech jsou správným řešením příkladu:  
 Nakresli graf libovolné funkce, která najednou splňuje následující podmínky:  
 a)  $D(f) = (-\infty; 1) \cup \langle 2; 5 \rangle$ ,      b)  $H(f) = \langle -1; \infty \rangle$ ,      c)  $f(3) = 2$ ,  
 d)  $f(3) < f(4)$ .



- ⋮ a) Funkce neodpovídá zadání, část grafu překračuje povolený obor hodnot.

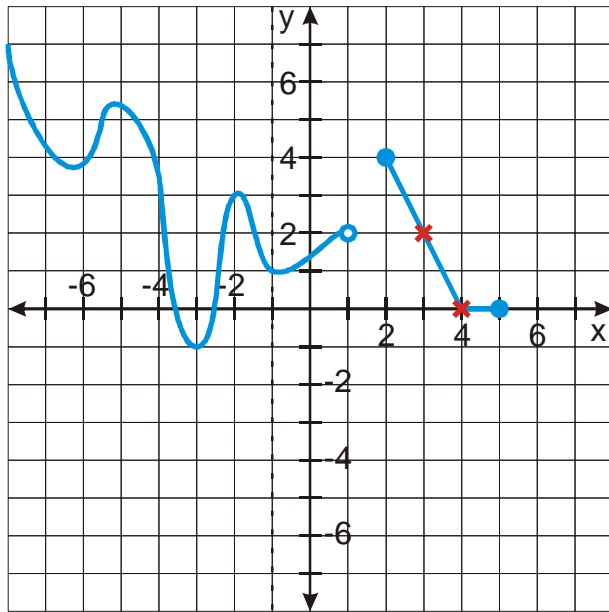


b) Funkce neodpovídá zadání, v jejím oboru hodnot chybí číslo  $-1$ .



c) Funkce neodpovídá zadání, neplatí, že  $f(3) < f(4)$ .





d) Funkce odpovídá zadání.

**Pedagogická poznámka:** Pořadí příkladů 4 a 5 je záměrné. Chci, aby si studenti nejdříve vyzkoušeli kreslení vlastních grafů a teprve poté hodnotili grafy někoho jiného. Pokud máme čas, zadávám studentům příklady podobné příkladu 4 i v dalších hodinách.

**Shrnutí:** Graf funkce nesmí obsahovat dva body nad sebou.