2.1.7 Prostá funkce

Předpoklady: 2103,

Pedagogická poznámka: Doba nutná k probrání této hodiny hodně závisí na tom, do jaké míry necháte studenty pracovat samostatně při řešení příkladu 2. Pokud jim řešení prozradíte sami, zvládnete hodinu za deset minut a můžete ji přilepit k jiné. Já osobně věnuji prvnímu příkladu tak 5 minut (studenti si v naprosté většině případů musí najít definici prostého zobrazení v sešitě a pak jsou překvapeni, jak málo toho musí změnit). Druhý příklad pomocí různého postrkávání trvá tak deset minut, grafy roztřídíme za 5. Pro zbytek hodiny je několik možností. Kromě příkladu 4 (popsán níže) je možné psát písemku, nebo počítat sbírku.
Pokud počítáme sbírku, většinu studentů nechám pracovat samostatně, s menšinou, která se špatně orientuje v grafech, společně řešíme příklady, které by jejich orientaci měly zlepšit.

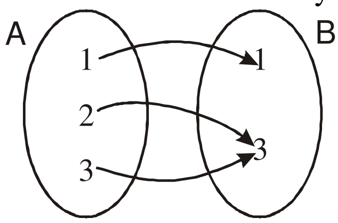
Každá funkce je zobrazení (funkce je speciální druh zobrazení), pokud splňuje podmínky pro prosté zobrazení, říkáme jí **prostá funkce**.

Př. 1: Sestav definici prosté funkce. Nejdříve se pokus definici sestavit bez pomoci definice prostého zobrazení.

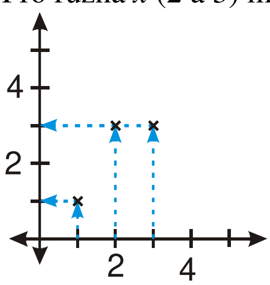
Prostá funkce:
Funkce *f* se nazývá prostá, právě když pro každá dvě $x_1; x_2 \in D(f)$ platí, je-li $x_1 \neq x_2$ pak i $y_1 \neq y_2$.

Př. 2: Stanov pravidlo, podle kterého půjde z grafu určit, zda se jedná o funkci prostou.

Zkusíme napodobit postup z minulé hodiny, kdy jsme hledali podmínku, kterou musí splňovat graf funkce.
Nakreslíme si množinový obrázek funkce, která není prostá.



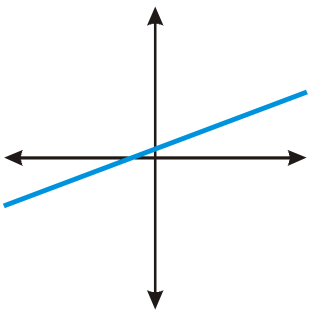
Pro různá *x* (2 a 3) máme stejné *y* (3). Nakreslíme si graf.

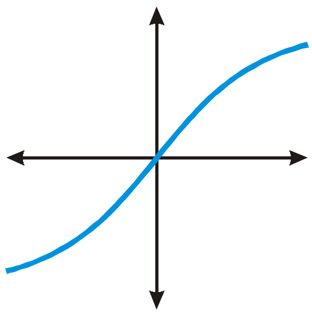


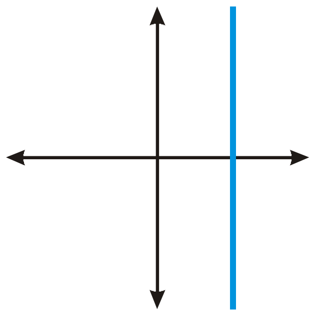
$\Rightarrow$ Funkce je prostá, právě když žádné dva body jejího grafu nejsou stejně vysoko ($\Rightarrow$ nemají stejnou hodnotu *y*)

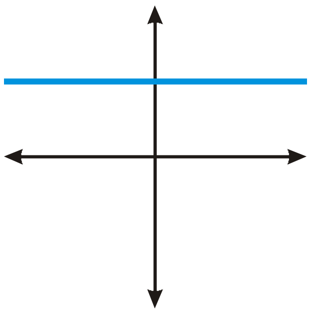
⇒ Funkce je prostá, právě když jejím grafem prochází každá vodorovná čára maximálně jednou.

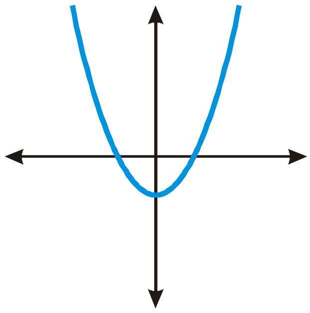
Př. 3: Urči, které z obrázků zachycují prosté funkce.

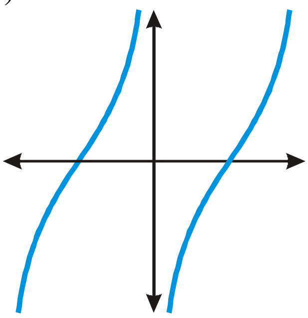

a)

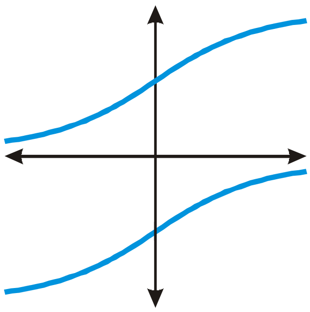

b)

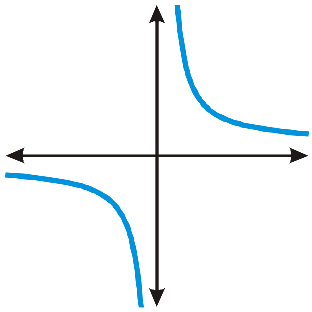

c)

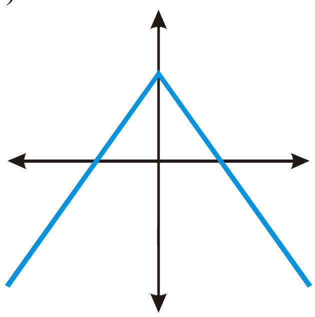

d)


e)


f)


g)


h)


i)

Prosté jsou funkce a), b), h). Na obrázcích c) a g) nejsou zobrazeny funkce.

Pedagogická poznámka: Obrázky relací jsou mezi funkce podstrčeny schválně. Část studentů zapomene, že kromě podmínky pro hodnoty na ose *y* musí graf splňovat i podmínky pro funkci a grafy c) a g) vyhodnotí jako prosté funkce.

Př. 4: Které z následujících vět jsou alternativními popisy prostých funkcí.
Funkce je prostá,
a) jestliže různým *x* náleží různá *y*.
b) jestliže pro každé $x \in D(f)$ existuje právě jedno $y \in H(f)$.
c) jestliže pro každé $y \in H(f)$ existuje právě jedno $x \in D(f)$.

a) Funkce je prostá, jestliže různým *x* náleží různá *y*.
Ano, jde o alternativní popis prosté funkce. V definici je $x_1 \neq x_2$ (tedy různá *x*) pak i $y_1 \neq y_2$ (různá *y*), tedy různým *x* náleží různá *y*.

b) Funkce je prostá, jestliže pro každé $x \in D(f)$ existuje právě jedno $y \in H(f)$.

Není to alternativní popis prosté funkce. Pro každé $x \in D(f)$ existuje právě jedno $y \in H(f)$, omezuje počet cest *x* (musí být pouze jedna), ale nic neříká o tom, kolik cest může končit u nějakého *y* (klidně jich může být víc z různých *x*). Jde o podmínku pro funkci.

c) Funkce je prostá, jestliže pro každé $y \in H(f)$ existuje právě jedno $x \in D(f)$.
Ano, jde o alternativní popis prosté funkce. Pro každé $y \in H(f)$ existuje právě jedno $x \in D(f)$ znamená, že každého *y* může končit jen jedna cesta z jednoho *x*, protože jde zároveň i o funkci (z jednoho *x* může vycházet jen jedna cesta), platí, že různým *x* náleží různá *y*.

Pedagogická poznámka: Následující příklady řešíme netypicky. Žáci pracují ve dvojicích, tabuli nepoužíváme. Oba spolusedící vyřeší bod 5 a) a pak si vymění sešity. Každý z nich pak v kontrolovaném příkladě určí definiční obor, obor hodnot, funkční hodnotu, o které se píše v zadání, a podle výsledku rozhodne, zda je příklad vyřešený správně. Pak si sešity vrátí, a buď opravují předchozí bod, nebo pokračují dále. Já pracuji s případným lichým žákem a kontroluji dvojice, kde je pravděpodobnost, že by případná chyba mohla zůstat neodhalena. Nedá se čekat, že by všichni žáci všechno stíhali, proto je po určité době posílám do dalšího příkladu.

Pedagogická poznámka: Nebudu tvrdit, že řešení není u následujících příkladů schválně. Není tam, protože jsem ho zatím nestihl dodělat a protože to nepovažuji u těchto příkladů za velký problém. Každý by měl v první řadě najít své vlastní řešení a ne se opičit po autorovi učebnice, proto řešení může chybět ještě dlouho.

Př. 5: Nakresli graf libovolné funkce, pro kterou najednou platí všechny podmínky:
a) $D(f) = R$, $f(3) = f(-1)$,
b) $D(f) = (-\infty;-1) \cup \langle 0;4 \rangle$, $f(-2) < f(1) < f(3)$,
c) $D(f) = \langle -3;-2 \rangle \cup (2;\infty)$, $f(x) > 0$, $f(-2) = 2$,
d) $D(f) = (-4;-1\rangle \cup \langle 3;4 \rangle \cup \{0;1\}$, funkce je prostá, $f(0) = -1$.

Př. 6: Nakresli graf libovolné funkce, pro kterou najednou platí všechny podmínky:
a) $H(f) = R$, $f(3) = f(-1)$,
b) $H(f) = (-5;-1) \cup \langle 0;4 \rangle$, $f(-2) > f(1) > f(3)$,
c) $H(f) = (-\infty;-1) \cup \langle 2;5 \rangle$, $f(-2) = f(3)$,
d) $H(f) = (-3;-1\rangle \cup \langle 3;4 \rangle \cup \{0;1\}$, funkce je prostá, $f(0) = -1$.

Př. 7: Nakresli graf libovolné funkce, pro kterou najednou platí všechny podmínky:
a) $D(f) = R$, $H(f) = (-\infty;-1) \cup \langle 0;4 \rangle$,
b) $D(f) = (-\infty;2)$, $H(f) = R$ $f(-2) < f(1)$,

c) $D(f)=\langle -3;-1\rangle \cup (2;\infty)$, $H(f)=(-\infty;0)\cup\langle 2;4)$, $f(-2)=2$,

d) $D(f)=(-\infty;-1\rangle \cup \{0;1\}$, $H(f)=R$, funkce je prostá, $f(0)=-1$.

Př. 8: Petáková:
strana 25/cvičení 22

Shrnutí: Prostá funkce musí pro různá x vytvářet různá y $\Rightarrow$ ze dvou různých čísel se nesmíme dostat ke stejnému cíli.