

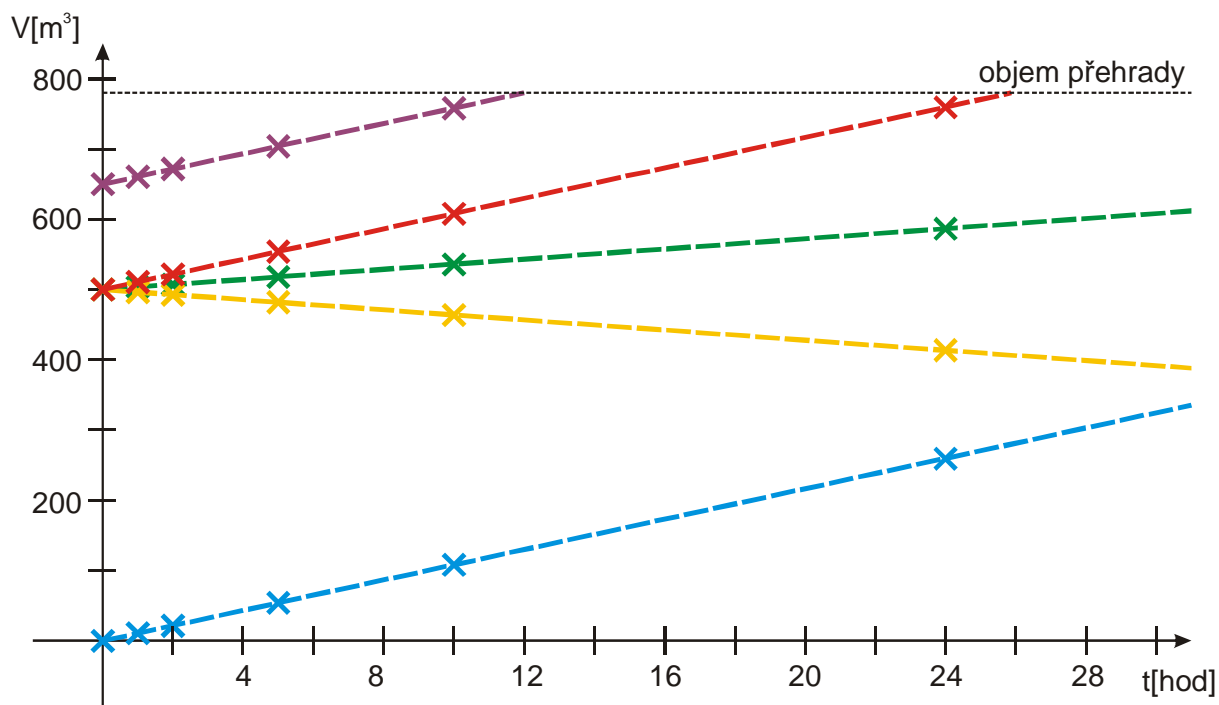
2.1.9 Lineární funkce II

Předpoklady: 2108

Pedagogická poznámka: Je třeba postupovat tak, aby na příklad 6, kde se poprvé kreslí grafy lineárních funkcí, zbylo minimálně 10 minut.

Př. 1: Přiřaď k jednotlivým čarám na obrázku, jednotlivé varianty zadání příkladu o Orlické přehradě:

- původní zadání (přítok $4000 \text{ m}^3/\text{s}$, odtok je $1000 \text{ m}^3/\text{s}$, 500 mil m^3)
 - na začátku povodně je nádrž zcela prázdná
 - přítok do nádrže je pouze $2000 \text{ m}^3/\text{s}$.
 - přítok do nádrže je pouze $1000 \text{ m}^3/\text{s}$, odtok je $2000 \text{ m}^3/\text{s}$.
 - na začátku povodně bylo v přehradě 650 mil m^3
- Ke každé z čar napiš její funkční předpis.



- původní zadání (přítok $4000 \text{ m}^3/\text{s}$, odtok je $1000 \text{ m}^3/\text{s}$, 500 mil m^3) – červená čára
 - na začátku povodně je nádrž zcela prázdná – modrá čára
 - přítok do nádrže je pouze $2000 \text{ m}^3/\text{s}$ - zelená čára
 - přítok do nádrže je pouze $1000 \text{ m}^3/\text{s}$, odtok je $2000 \text{ m}^3/\text{s}$ - žlutá čára
 - na začátku povodně bylo v přehradě 650 mil m^3 - fialová čára
- podrobnosti v minulé hodině 2108

Pedagogická poznámka: Pokud řešíte příklad ve třídě, je dobré si nad obrázkem pořádně popovídat pokusit se najít, co nejvíce důvodů pro vytvoření dvojic zadání-čára.

Co mají všechny funkce společné?

- grafem je část přímky
- předpis má tvar $y = ax + b$

⇒ takovým funkcím se říká **lineární** (latinsky se čára řekne linea).

Lineární funkce je každá funkce, která jde zapsat ve tvaru $y = ax + b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Grafem lineární funkce je přímka (část přímky).

Př. 2: Najdi nejrychlejší možný způsob zakreslení grafu libovolné lineární funkce.

Graf lineární funkce je přímka ⇒ na nakreslení grafu lineární funkce mi stačí určit libovolné dva body a spojit je přímkou.

Př. 3: Urči hodnoty parametrů a, b u všech předchozích lineárních funkcí.

a) původní zadání:

$$y = 10,8x + 500 \Rightarrow a = 10,8, b = 500$$

b) na začátku povodně je nádrž zcela prázdná

$$y = 10,8x \Rightarrow a = 10,8, b = 0$$

c) přítok do nádrže je pouze $2000 \text{ m}^3/\text{s}$.

$$y = 3,6x + 500 \Rightarrow a = 3,6, b = 500$$

d) přítok do nádrže je pouze $1000 \text{ m}^3/\text{s}$, odtok je $2000 \text{ m}^3/\text{s}$.

$$y = -3,6x + 500 \Rightarrow a = -3,6, b = 500$$

e) na začátku povodně bylo v přehradě 650 mil m^3

$$y = 650 + 10,8x \Rightarrow a = 10,8, b = 650$$

Pedagogická poznámka: Pokud se zdá, že studentům předchozí příklad nečiní potíže, příliš se u něj nezdržujeme a řešíme ho pouze slovně.

Speciální případy lineární funkce:

- $a = 0 \Rightarrow y = 0x + b = b$ - **konstantní funkce**
předpis neobsahuje neznámou $x \Rightarrow$ pro všechna x má funkce stejnou hodnotu b (hodnota je neměnná – konstantní)
graf je vodorovná přímka
- $b = 0 \Rightarrow y = ax + 0 = ax$ - **přímá úměrnost**
graf je přímka procházející počátkem (bodem $[0, 0]$)

Př. 4: Rozhodni, zda některé z lineárních funkcí, které popisovaly množství vody v přehradě, patří mezi konstantní funkce nebo přímé úměrnosti.

Žádná ze zadaných funkcí mezi konstantní nepatří, u všech se měnilo množství vody v nádrži. Konstantní by byla funkce v případě, že by do přehrady vtékalo a z ní vytékalo stejné množství vody.

Přímou úměrností je příklad a) na začátku povodně je nádrž zcela prázdná.

Př. 5: Nakresli grafy funkcí:

a) $y = 3$

b) $y = -\pi$

c) $y = 2x$

d) $y = -0,5x$

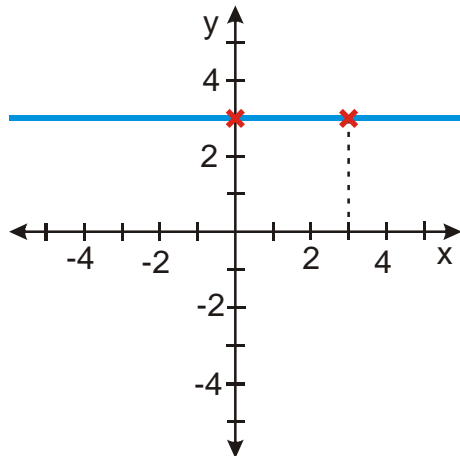
Pomocí nakreslených grafů ověř zda platí tvrzení:

1) grafem konstantní funkce je vodorovná přímka

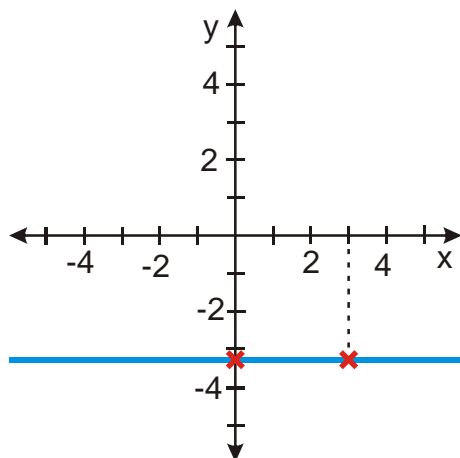
2) grafem přímé úměrnosti je přímka procházející počátkem

Obě tvrzení zdůvodni i úvahou.

a) $y = 3 \Rightarrow$ body $[0;3], [3;3]$



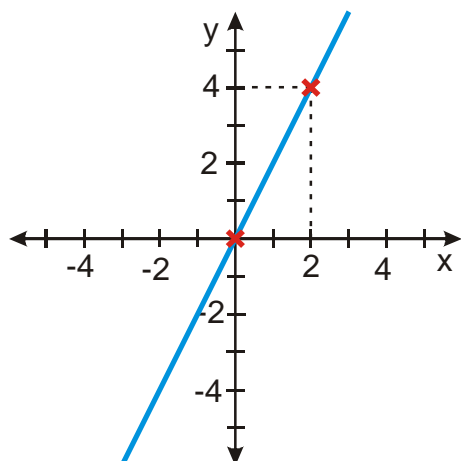
b) $y = -\pi \Rightarrow$ body $[0;-\pi], [3;-\pi]$



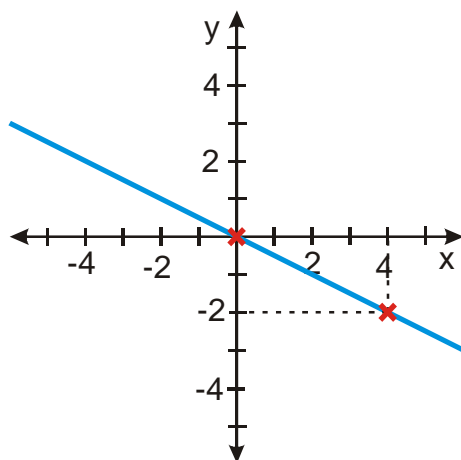
Obě předchozí funkce byly konstantní a oba grafy jsou rovnoběžné přímky.

Konstantní funkce = pro všechna x dostávám stejné $y \Rightarrow$ všechny body grafu budou mít stejnou y -ovou souřadnici \Rightarrow graf je vodorovná přímka

c) $y = 2x \Rightarrow$ body $[0;0], [2;4]$



d) $y = -0,5x \Rightarrow$ body $[0;0]$, $[4;-2]$



Obě předchozí funkce jsou přímé úměrnosti a oba grafy procházejí bodem $[0;0]$.

Přímá úměrnost = jde zapsat ve tvaru $y = ax$, dosadím $x = 0 \Rightarrow y = ax = a \cdot 0 = 0 \Rightarrow$ graf prochází bodem $[0;0]$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je sice strašně jednoduchý, ale zejména kreslení konstantních funkcí dělá studentům problémy. V předpisu jich schází informace o x a tak graf funkce často kreslí jako jediný bod $[0;3]$, který vnímají jako vyjádření faktu, že $y = 3$ a necítí, že by měl něco společného s x . Snažím se jim vysvětlit, že i bod $[0;3]$ obsahuje x a neliší se od jiných bodů jako například $[1;3]$. Navíc zdůrazňuji, že funkce je vždy o přiřazování hodnot y k x a pokud její předpis x neobsahuje, znamená to pouze, že na hodnotě x nezáleží a všem x se přiřazuje stejné číslo, které je udané v předpisu (v našem případě 3).
Občas je také možné se setkat s tím, že studenti špatně počítají hodnoty u funkce bodu c). Z pro mě zatím neznámého důvodu získají „obrácené“ dvojice $[2;1]$, $[4;2]$. Je takových je nutné chtít, aby doopravdy dosadili do funkčního předpisu. Rozhodně patří mezi příklady, kde je nejnütnější, aby je studenti dělali sami a učitel tak mohl zjistit, jaké chyby dělají. Často se podaří odkrýt zásadní problémy.

Pedagogická poznámka: U následujícího příkladu se mohou vyskytnout problémy s body $[0;2]$, kde někteří žáci neví, jak bod nakreslit (kvůli nule). Snažím se donutit žáky

k tomu, aby si alespoň ze začátku psali dvojice bodů, podle kterých kreslí. Často si nepíší nic a mají v grafech strašný chaos.

Př. 6: Nakresli graf lineární funkce:

a) $y = x + 2$

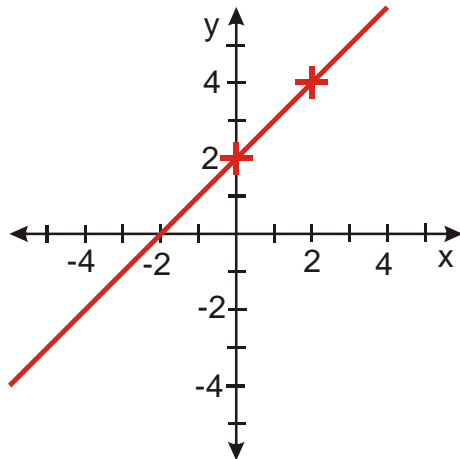
b) $y = -2x + 4$

c) $y = 0,5x - 1$

a) $y = x + 2$

Dosazujeme $x = 0 \Rightarrow y = x + 2 = 0 + 2 = 2 \Rightarrow$ bod $[0; 2]$.

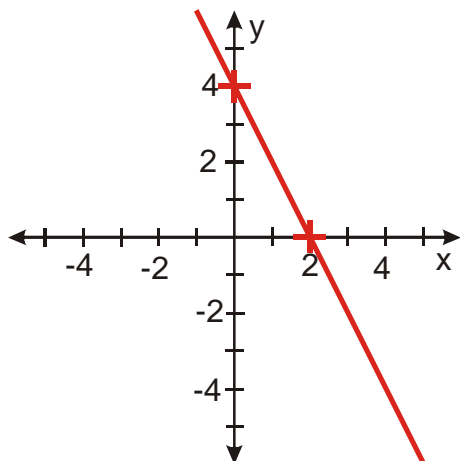
Dosazujeme $x = 2 \Rightarrow y = x + 2 = 2 + 2 = 4 \Rightarrow$ bod $[2; 4]$.



b) $y = -2x + 4$

Dosazujeme $x = 0 \Rightarrow y = -2x + 4 = -2 \cdot 0 + 4 = 4 \Rightarrow$ bod $[0; 4]$.

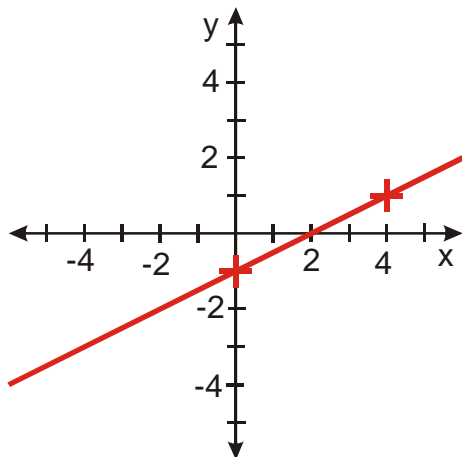
Dosazujeme $x = 2 \Rightarrow y = -2x + 4 = -2 \cdot 2 + 4 = 0 \Rightarrow$ bod $[2; 0]$.



c) $y = 0,5x - 1$

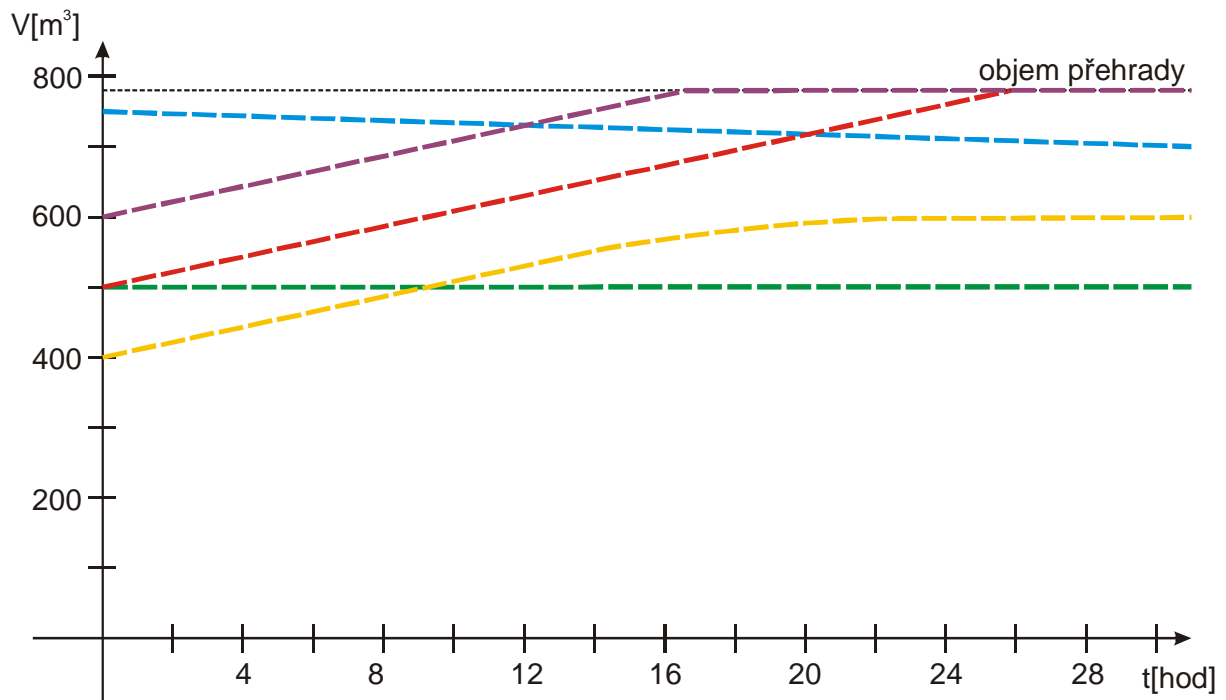
Dosazujeme $x = 0 \Rightarrow y = 0,5x - 1 = 0,5 \cdot 0 - 1 = -1 \Rightarrow$ bod $[0; -1]$.

Dosazujeme $x = 4 \Rightarrow y = 0,5x - 1 = 0,5 \cdot 4 - 1 = 1 \Rightarrow$ bod $[4; 1]$.



Pedagogická poznámka: Následující příklad považuji za docela přínosný, ale pokud má někdo velké problémy s předchozím příkladem, snažím se, aby alespoň jeden z bodů udělal tak samostatně, aby mohl doma sám vyřešit příklad 8. Třídě pak nechám přemýšlet nad následujícím příkladem, který si rychle zkontrolujeme před zvoněním.

Př. 7: Na obrázku je kromě původního zadání příkladu o Orlické přehradě (červená čára) nakresleno několik dalších závislostí objemu zadržované vody na čase. Popiš slovně, jak se objem vody v přehradě mění a urči počáteční objem vody v přehradě. U závislostí, které můžeme považovat za lineární funkce urči znaménko koeficientu a .



- **modrá čára:** počáteční objem vody v přehradě asi 750 mil m^3 , množství vody v přehradě se plynule zmenšuje, odtok je větší než přítok, jde o lineární funkci, záporný koeficient a
- **fialová čára:** počáteční objem vody v přehradě 600 mil m^3 , množství vody se zvětšovalo stejně rychle jako v původním zadání, po naplnění přehrady se množství

vody nezvyšovalo, nejde o lineární funkci, ale bylo by možné funkci rozdělit na dvě lineární funkce

- **zelená čára:** počáteční objem vody v přehradě 500 mil m^3 se nemění (přítok se rovná odtoku), jde o lineární konstantní funkci, koeficient a je nulový
- **žlutá čára:** počáteční objem vody v přehradě 400 mil m^3 nejdříve roste jako v původním zadání, poté se přírůstek zmenšuje až se objem vody ustálí, nejde o lineární funkci

Pedagogická poznámka: Následující příklad není určen k probírání v hodině. Jde o domácí cvičení pro žáky, u kterých se objeví problémy s příkladem 6.

Př. 8: Nakresli graf lineární funkce:

a) $y = x - 3$

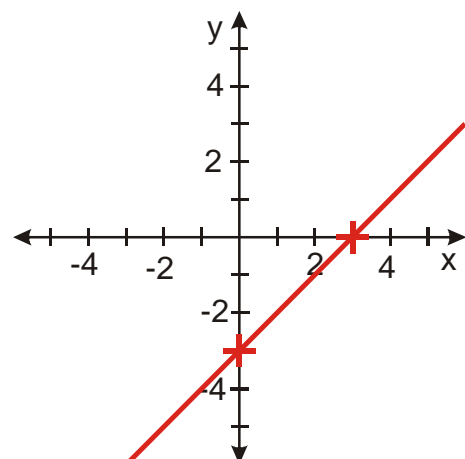
b) $y = \frac{3}{2}x - 1$

c) $y = -\frac{2}{3}x + 1$

a) $y = x - 3$

Dosazujeme $x = 0 \Rightarrow y = x - 3 = 0 - 3 = -3 \Rightarrow$ bod $[0; -3]$.

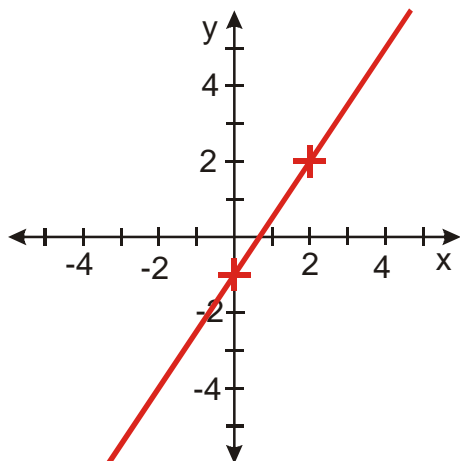
Dosazujeme $x = 3 \Rightarrow y = x - 3 = 3 - 3 = 0 \Rightarrow$ bod $[3; 0]$.



b) $y = \frac{3}{2}x - 1$

Dosazujeme $x = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - 1 = \frac{3}{2} \cdot 0 - 1 = -1 \Rightarrow$ bod $[0; -1]$.

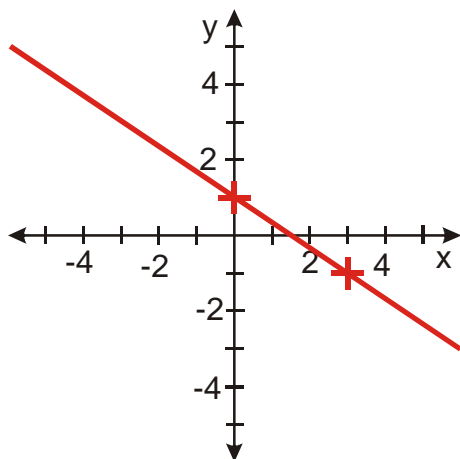
Dosazujeme $x = 2 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - 1 = \frac{3}{2} \cdot 2 - 1 = 2 \Rightarrow$ bod $[2; 2]$.



c) $y = -\frac{2}{3}x + 1$

Dosazujeme $x = 0 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + 1 = -\frac{2}{3} \cdot 0 + 1 = 1 \Rightarrow$ bod $[0; 1]$.

Dosazujeme $x = 3$ (kvůli zlomku v předpisu funkce) $\Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + 1 = -\frac{2}{3} \cdot 3 + 1 = -1 \Rightarrow$ bod $[3; -1]$.



Shrnutí: Grafem lineární funkce je přímka, kterou můžeme nakreslit pomocí dvou bodů.