

2.1.10 Lineární funkce III

Předpoklady: 2109

Minulá hodina

Lineární funkce je každá funkce, která jde zapsat ve tvaru $y = ax + b$, kde $a, b \in R$. Grafem lineární funkce je přímka (část přímky), kterou kreslíme většinou pomocí dvou bodů.

Pedagogická poznámka: Než začnou studenti kreslit grafy, je dobré si popovídat o strategii na volbu bodů, které použijí na kreslení grafů.

Nepřestává mě překvapovat, jak velký problém pro studenty kreslení následujících grafů představuje. Nezbyvá než vydržet a snažit se jim radit, jak by mohli kreslení urychlit. Důležité je hlídat, aby si nepletli x a y , hodně chyb vzniká i tím, že studenti nejdřív spočítají všechny body u všech funkcí a pak teprve začnou kreslit. Myslím, že je třeba se snažit, aby tento postup nepoužívali. Jednak se jim může něco splést a jednak se tím ztrácí souvislost mezi spočítaným a nakresleným. Samozřejmě nikde není dáno, že by studenti měli pro nakreslení grafů používat stejné body jako učebnice.

Snažím se je dotlačit k tomu, aby předpis funkce kreslili přímo do obrázku k odpovídající čáře místo jména funkce.

Pedagogická poznámka: Žáci netuší, jak mají oba příklady vyjít, a pokud nekreslí do čtverečkovaného papíru, grafy rozhodně nenakreslí rovnoběžně. Jednou možností je čtverečkový sešit (ale čtverečky jsou dost malé), druhou možností je vytisknout podklady pro grafy z příloženého souboru. Žákům zdůrazňuji, že jde o výjimku a v dalších hodinách podobné papíry nedostanou. Měli by tedy během své práce přemýšlet o tom, jak kreslit, aby byla menší pravděpodobnost omylu i na čistém bílém papíře.

Pedagogická poznámka: U pomalejších studentů nečekáme až u prvních dvou příkladů nakreslí všechny čtyři grafy. Stačí, když udělají dva, obrázek všech grafů si mohou prohlédnout na stěně a vyvozovat z něj.

Jaký je význam konstant a , b ?

Nejdřív b .

Př. 1: Nakresli do jednoho obrázku grafy funkcí: $f_1: y = x$, $f_2: y = x + 1$, $f_3: y = x + 3$, $f_4: y = x - 2$. Podle obrázku rozhodni, jak ovlivňují hodnoty parametru b graf lineární funkce. Analogicky rozhodni, jak ovlivňují graf hodnoty parametru a .

$$f_1: y = x$$

Dosazujeme $x = 0 \Rightarrow y = x = 0 \Rightarrow$ bod $[0; 0]$.

Dosazujeme $x = 2 \Rightarrow y = x = 2 \Rightarrow$ bod $[2; 2]$.

$$f_2: y = x + 1$$

Dosazujeme $x = 0 \Rightarrow y = x + 1 = 0 + 1 = 1 \Rightarrow$ bod $[0; 1]$.

Dosazujeme $x = 2 \Rightarrow y = x + 1 = 2 + 1 = 3 \Rightarrow$ bod $[2; 3]$.

$$f_3: y = x + 3$$

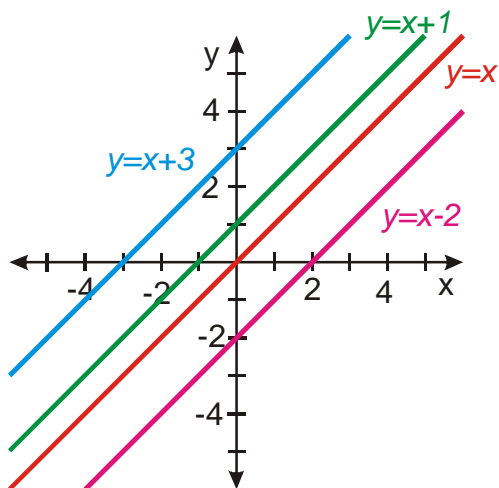
Dosazujeme $x = 0 \Rightarrow y = x + 3 = 0 + 3 = 3 \Rightarrow$ bod $[0; 3]$.

Dosazujeme $x = 2 \Rightarrow y = x + 3 = 2 + 3 = 5 \Rightarrow$ bod $[2; 5]$.

$$f_4: y = x - 2$$

Dosazujeme $x = 0 \Rightarrow y = x - 2 = 0 - 2 = -2 \Rightarrow$ bod $[0; -2]$.

Dosazujeme $x = 2 \Rightarrow y = x - 2 = 2 - 2 = 0 \Rightarrow$ bod $[2; 0]$.



\Rightarrow Všechny grafy mají stejný směr, ale jsou různě posunuté ve svislém směru. \Rightarrow konstanta b neovlivňuje směr přímky, ale její posunutí ve svislém směru (určuje také průsečík s osou y , který má souřadnice $[0; b]$).

Poznámka: Metoda, kterou jsme použili je vlastně fyzikální metodou na objevování funkčních závislostí. Jednu proměnou jsme měnili a vše ostatní nechávali stejné, abychom zjistili, jak měnící se proměnná ovlivňuje výsledek.

Ted' a.

Př. 2: Nakresli do jednoho obrázku grafy funkcí: $f_1: y = x + 1$, $f_2: y = 3x + 1$,
 $f_3: y = 0,5x + 1$, $f_4: y = -2x + 1$. Podle obrázku rozhodni, jak ovlivňují hodnoty parametru a graf lineární funkce.

$$f_1: y = x + 1$$

Dosazujeme $x = 0 \Rightarrow y = x + 1 = 0 + 1 = 1 \Rightarrow$ bod $[0; 1]$.

Dosazujeme $x = 2 \Rightarrow y = x + 1 = 2 + 1 = 3 \Rightarrow$ bod $[2; 3]$.

$$f_2: y = 3x + 1$$

Dosazujeme $x = 0 \Rightarrow y = 3x + 1 = 3 \cdot 0 + 1 = 1 \Rightarrow$ bod $[0; 1]$.

Dosazujeme $x = 1 \Rightarrow y = 3x + 1 = 3 \cdot 1 + 1 = 4 \Rightarrow$ bod $[1; 4]$.

$$f_3: y = 0,5x + 1$$

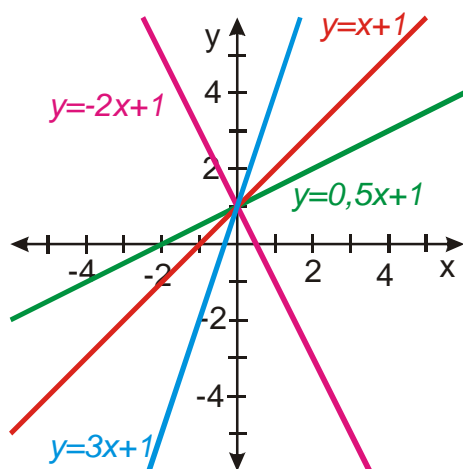
Dosazujeme $x = 0 \Rightarrow y = 0,5x + 1 = 0,5 \cdot 0 + 1 = 1 \Rightarrow$ bod $[0; 1]$.

Dosazujeme $x = 2 \Rightarrow y = 0,5x + 1 = 0,5 \cdot 2 + 1 = 2 \Rightarrow$ bod $[2; 2]$.

$$f_4: y = -2x + 1$$

Dosazujeme $x=0 \Rightarrow y=-2x+1=-2 \cdot 0+1=1 \Rightarrow$ bod $[0;1]$.

Dosazujeme $x=2 \Rightarrow y=-2x+1=-2 \cdot 2+1=-3 \Rightarrow$ bod $[2;-3]$.



Všechny grafy se s osou y protínají v bodě $[0,1]$, ale mají různý směr. \Rightarrow konstanta a neovlivňuje posunutí přímky, ale její směr.

$f_2 : y = 3x + 1 \Rightarrow$ velké a , strmý graf.

$f_4 : y = 0,5x + 1 \Rightarrow$ malé a , pozvolný graf.

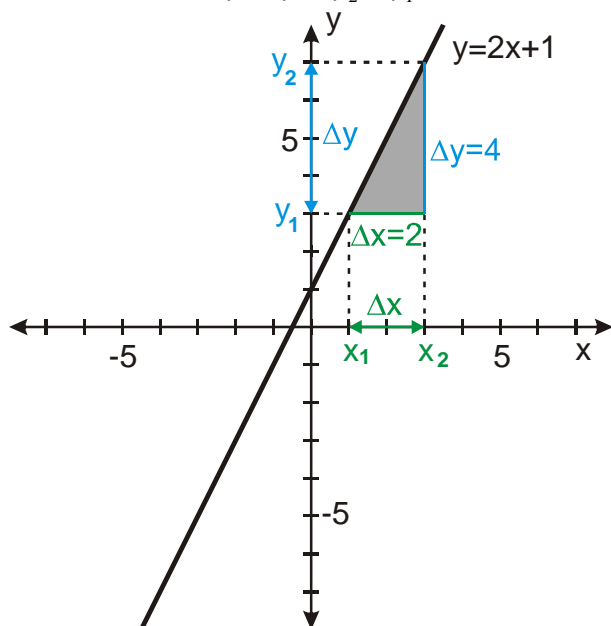
Jak popisuje číslo a sklon?

Velký sklon = změnil-li se x o málo, pak se y zvětší o hodně.

Zkusíme na funkci $y = 2x + 1$.

O kolik se zvětší x : $\Delta x = x_2 - x_1 = 3 - 1 = 2$.

O kolik se zvětší y : $\Delta y = y_2 - y_1 = 7 - 3 = 4$.

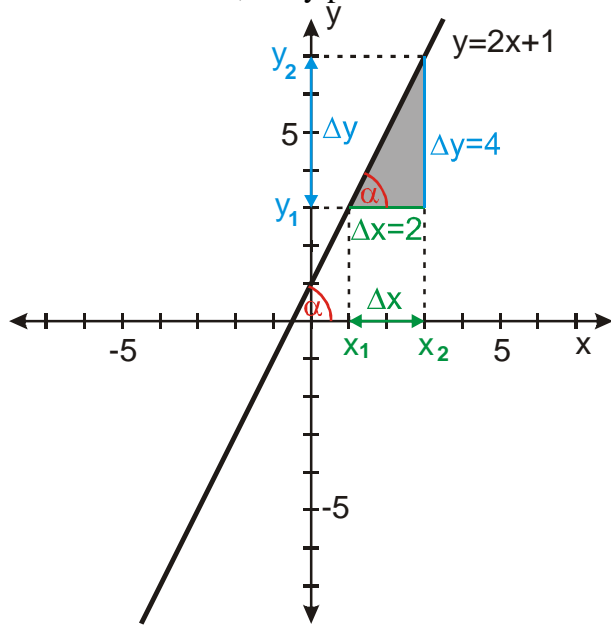


Kopec je strmý, když na dráze 3 m vylezeme o 2 m výš. Když vylezeme na dráze 1 km o 10 výš, strmé to moc není. \Rightarrow Strmost není velikost Δy , ale poměr $\frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow$ spočteme ho:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{2} = 2 \text{ - to je hodnota } a! \quad \Rightarrow \text{tedy } a = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

$$\text{Jiný zápis } a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Směr udává i úhel, který přímka svírá s osou $x \Rightarrow$ i úhel by měl být vyjádřit pomocí a .



Úhel můžeme v pravouhlém trojúhelníku vyjádřit pomocí goniometrických funkcí, nejlépe

$$\text{tangens } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přilehlá}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = a \Rightarrow a = \operatorname{tg} \alpha.$$

Pedagogická poznámka: Nechávám studenty, aby si sami zvolili jiná čísla x_1 a x_2 a ověřili si platnost předchozích výsledků.

Stejný typ grafu už známe z fyziky:

- rovnoměrný pohyb $s = vt + s_0 \Leftrightarrow y = ax + b$.

Význam konstant je stejný:

- a udává, jak rychle se mění $y \Leftrightarrow v$ (rychlost) udává, jak rychle se mění dráha,
- b udává, průsečík s osou $y \Leftrightarrow s_0$ udává, jak vysoko na ose s začíná graf dráhy.

Konstanta a určuje u grafu lineární funkce směr, konstanta b posunutí ve svislém směru.

Př. 3: Na obrázku bez popsaných os jsou načrtnuty grafy funkcí.

a) $y = -0,25x - 1$

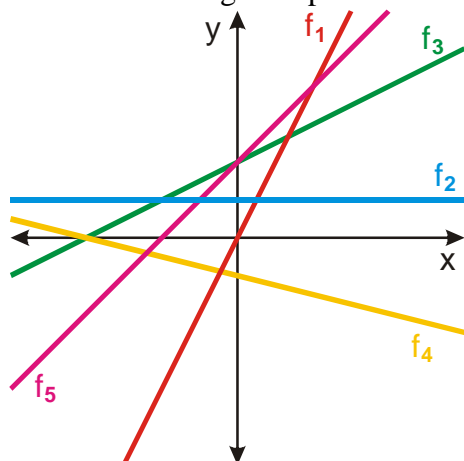
b) $y = 1$

c) $y = x + 2$

d) $y = 2x$

e) $y = 0,5x + 2$

Přiřaď každému grafu správnou funkci.



Správné přiřazení:

$f_1 : y = 2x$ - jediná přímá úměrnost, nejstrmější ze všech funkcí,

$f_2 : y = 1$ - jediná konstantní funkce, protíná se s osou y níže než většina ostatních funkcí,

$f_3 : y = 0,5x + 2$ - protíná se s osou y výše než konstantní funkce, má menší sklon,

$f_4 : y = -0,25x - 1$ - protíná se s osou y v záporných číslech, jediná jde dolů,

$f_5 : y = x + 2$ - protíná se s osou y výše než konstantní funkce, má větší sklon.

Př. 4: Na obrázku bez popsaných os jsou načrtnuty grafy funkcí.

a) $y = 0,2x$

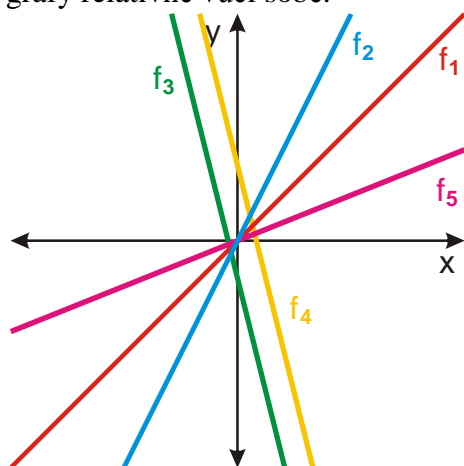
b) $y = -2x + 2$

c) $y = x$

d) $y = 0,5x$

e) $y = -2x - 1$

Přiřaď každému grafu správnou funkci. Upozornění: obrázek je zdeformován, sklony přímků neodpovídají sklonům přímků při normálním zobrazení. Je nutné posuzovat grafy relativně vůči sobě.



Správné přiřazení:

$f_1 : y = 0,5x$ - přímá úměrnost, středně velká strmost,

$f_2 : y = x$ - přímá úměrnost, nejstrmější graf,

$f_3 : y = -2x - 1$ - funkce směřuje dolů, protíná se s osou y v záporném čísle,

$f_4 : y = -2x + 2$ - funkce směřuje dolů, protíná se s osou y v kladném čísle,

$f_5 : y = 0,2x$ - přímá úměrnost, nejméně strmý graf.

Př. 5: Načrtni (bez počítání a vynášení bodů) do jednoho obrázku bez popsaných os (analogicky jako v předchozím příkladě) grafy těchto funkcí.

a) $f_1 : y = 3x - 1$

b) $f_2 : y = 3x + 2$

c) $f_3 : y = -2x$

d) $f_4 : y = -x + 2$

e) $f_5 : y = -1$

a) $f_1 : y = 3x - 1$

$a = 3 \Rightarrow$ strmý graf směřující doprava nahoru, $b = -1 \Rightarrow$ s osou y se protíná pod počátkem.

b) $f_2 : y = 3x + 2$

$a = 3$ $b = 2 \Rightarrow$ graf rovnoběžný s grafem z bodu a) s osou y se protíná nad počátkem.

c) $f_3 : y = -2x$

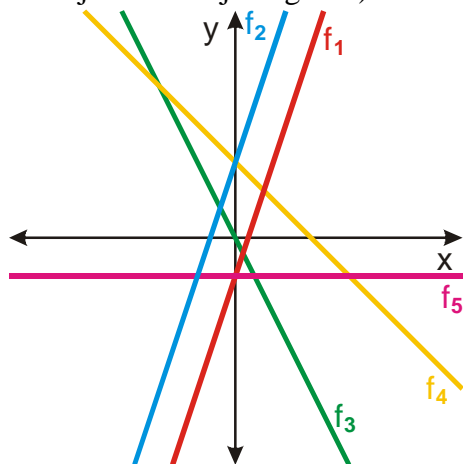
$a = -2 \Rightarrow$ strmý (ale méně než v bodech a) b)) graf směřující doprava dolů, $b = 0 \Rightarrow$ prochází počátkem.

d) $f_4 : y = -x + 2$

$a = -1 \Rightarrow$ graf směřující doprava dolů (méně strmý než v bodě c)), $b = 2 \Rightarrow$ s osou y se protíná nad počátkem ve stejném bodě jako graf z bodu b).

e) $f_5 : y = -1$

$a = 0 \Rightarrow$ konstantní funkce, vodorovná přímka, $b = -1 \Rightarrow$ s osou y se protíná pod počátkem ve stejném bodě jako graf a).



Shrnutí: Grafy lineární funkcí můžeme kreslit také podle hodnot jejich parametrů - a určuje strmost, b určuje průsečík s osou y .