2.1.15 Slovní úlohy na lineární funkce

Předpoklady: 2108

Pedagogická poznámka: Obsah hodiny přesahuje 45 minut (pokud necháte studenty pracovat samostatně). Poslední příklad tak zůstává na další hodinu nebo na doma.

Př. 1: Petr zálohuje internet a proto potřebuje velké množství zapisovatelných DVD disků. Může je koupit buď v obchodě ve svém městečku za 13 Kč/kus nebo může dojet do okresního města, kde stojí pouze 10 Kč/kus. Cesta do okresního města a zpět stojí 40 Kč.
Sestav funkce, které udávají závislost zaplacené ceny na množství koupených DVD, v případě že nakupuje doma a v případě, že nakupuje ve městě. Urči pro všechna možná množství kupovaných DVD výhodnější způsob nákupu.

Počet koupených DVD x
Zaplacená cena y

Nákup doma: $y = 13x$ (za každé DVD 13 korun)
Nákup ve městě: $y = 10x + 40$ (za každé DVD 10 korun a 40 korun za cestu)

Nákup doma je výhodnější, když zaplatí menší cenu.
Kdy zaplatí stejně?
$13x = 10x + 40$
$3x = 40$
$x = \frac{40}{3} = 13,\overline{3}$
Protože DVD se kupují pouze po celých kusech platí, že pro nákup méně než 14 DVD je výhodnější nakupovat doma, pro 14 a více DVD je lepší dojet do města.

Poznámka: Minimální počet disků, pro který se vyplatí jet do města, můžeme určit i úvahou. Disk je ve městě o 3 Kč levnější, ale dražší o cestovní náklady, které se rozpočítávají na počet nakoupených disků. $\Rightarrow$ Musíme spočítat kolik disků musíme koupit, aby na každý připadly 3 Kč cestovních nákladů: $\frac{40}{3} = x = 13,\overline{3}$. Tento výsledek přesně odpovídá poslední fázi výpočtu.

Pedagogická poznámka: Studenti mají pro mě až překvapivé problémy se sestavením rovnosti obou funkčních předpisů. Bavíme se pak o tom, že pro malé množství disků je určitě výhodnější nakupovat doma, pro obrovská množství disků pak ve městě. Hraničním počtem pak bude situace, kdy nám celý nákup vyjde stejně draho ve městě i doma.

Př. 2: V rybníce je $150000\ \mathrm{m}^3$ vody. Otevřeme-li stavidla, každou sekundu vyteče $10\ \mathrm{m}^3$ vody. Urči funkci, která udává závislost množství vody v rybníce na čase od otevření stavidla, za předpokladu, že rybník má stálý přítok $3\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}$. Za jak dlouho bude rybník vypuštěn?

Množství vody y
Čas od otevření stavidla x

Za jednu sekundu, odteče $10\ \mathrm{m}^3$, přiteče $3\ \mathrm{m}^3$ $\Rightarrow$ ubude $7\ \mathrm{m}^3$.

Množství vody v rybníce na začátku	$150000\ \mathrm{m}^3$
Množství body v rybníce po 1 s	$150000-7$
Množství body v rybníce po 2 s	$150000-2\cdot 7$
Množství body v rybníce po 5 s	$150000-5\cdot 7$
Množství body v rybníce po x s	$150000-x\cdot 7$

Funkce $y=150000-7x$

Rybník bude vypuštěný až v něm bude $0\ \mathrm{m}^3$ $\Rightarrow$ $y=0$

$0=150000-7x$
$7x=150000$
$x \doteq 21429\ \mathrm{s} = 5,95\ \mathrm{hod}$

Rybník bude zcela vypuštěný za 6 hodin.

Pedagogická poznámka: Následující příklad je důležitý. Tak tři čtvrtiny studentů ho řeší špatně, přesto je dobré nechat je, aby se trochu potrápili a po vyřešení příkladu nebo v jeho průběhu diskutovat chyby, kterých se při svém řešení dopustili. Upozorňuju je hlavně na fakt, že si skoro nikdy odvozený vztah zpětně neozkoušejí, například jestli jim neříká, že student bude mít příjmy už při studiu na vysoké škole.

Př. 3: Výše průměrné mzdy silně závisí na nejvyšším dosaženém vzdělání. V roce 2002 byl průměrný plat středoškoláka s maturitou 16700 Kč za měsíc, průměrný plat vysokoškoláka byl už 28500 Kč. Na druhou stranu musí vysokoškoláci strávit ve škole pět let, po které již středoškoláci chodí do práce a vydělávají.
Napiš funkce, které udávají celkovou částku v tisících vydělanou průměrným středoškolákem a vysokoškolákem v závislosti na počtu let uplynulých od maturity.
Po kolika letech od maturity si průměrný vysokoškolák vydělá víc než jeho spolužák, který má pouze maturitu. Částky ročních příjmů zakrouhli na tisíce.
Urči rozdíl v celoživotních příjmech vysokoškoláka a středoškoláka, pokud oba odejdou do důchodu v 65 letech a maturovali v devatenácti.

roční příjem středoškoláka: $12\cdot 16700=200400\doteq 200000$
roční příjem vysokoškoláka: $12\cdot 28500=342000$

vydělané peníze y
let od maturity x

středoškolák

1 rok od maturity 200
2 roky od maturity $200\cdot 2=400$

3 roky od maturity $200 \cdot 3 = 600$
x let od maturity $200 \cdot x$
Funkce $y = 200x$, $x \in \langle 0; \infty)$

vysokoškolák
1 rok od maturity 0
2 roky od maturity 0
6 let od maturity $342 \cdot 1 = 342$
$\Rightarrow$ zápis je sice správný, ale nikde se v něm nevyskytuje číslice 6, která udává počet let uplynulých od maturity, tuto číslici v zápisu potřebujeme, pak ji naradíme proměnnou x
$\Rightarrow$ zapíšeme $1 = 6 - 5$ (1 rok v práci = 6 let od maturity – 5 let studia na VŠ) $\Rightarrow$
6 let od maturity $342(6-5) = 342$
7 let od maturity $342(7-5) = 684$
8 let od maturity $342(8-5) = 1026$
x let od maturity $342(x-5) = 342x - 1710$
Funkce $y = 342(x-5) = 342x - 1710$, $x \in \langle 5; \infty)$

Kde vydělají stejně?
$200 \cdot x = 342x - 1710$
$1710 = 142x$
$x = 12,04...$

Po 12 letech od maturity (tedy po 7 letech od promoce) budou příjmy vysokoškoláka téměř stejné jako příjmy středoškoláka s maturitou, po 13 letech pak už budou podstatně vyšší.

Důchod 65 let $\Rightarrow$ od maturity $65 - 19 = 46$ let
středoškolák: $y = 200x = 200 \cdot 46 = 9200$
vysokoškolák: $y = 342x - 1710 = 14022$
rozdíl: $14022 - 9200 = 4822$

Vysokoškolák vydělá za svůj život průměrně o 4 822 000 Kč více než středoškolák.

Pedagogická poznámka: Někteří studenti argumentují tím, že jednodušší než sestavovat funkční závislosti, je příklad natvrdo spočítat. Bráním se tím, že jakmile se podaří závislosti sestavit, je výpočet čehokoliv strašně jednoduchý. Při přímém počítání začínáme vždy znova od začátku.

Př. 4: Vysvětli význam čísla 1710 v roznásobeném tvaru funkce pro vysokoškoláka v předchozím příkladu.

$y = 342(x-5) = 342x - 342 \cdot 5 = 342x - 1710$
číslo 1710 má význam částky, kterou by vysokoškolák vydělal, kdyby po maturitě nastoupil do práce a bral mzdu vysokoškoláka

Př. 5: Najdi na internetu na další údaje vztahující se k problematice předchozích dvou příkladů a najdi fakta, která podporují názor, že:

a) rozdíl v příjmech vysokoškoláků a středoškoláků jsou ve skutečnosti větší než jsme spočítali
b) rozdíl v příjmech vysokoškoláků a středoškoláků jsou ve skutečnosti menší než jsme spočítali

jen několik z mnoha argumentů:
a) argumenty pro větší rozdíly v příjmech
vysokoškoláci si vydělávají už při studiu
platy rostou, roste zřejmě i minimální rozdíl v nominálních příjmech
…
b) argumenty pro menší rozdíly v příjmech
studium na vysoké škole přináší i náklady, které musí student hradit
u vysokoškoláků jsou rozdíly v příjmech daleko větší než u středoškoláků, rozdíl mezi skutečnou mzdou většiny vysokoškoláků a většiny středoškoláků není tak velký
podíl vysokoškoláků v české populaci se rychle zvyšuje. VŠ vzdělání tak přestává být výjimečnou záležitostí a bude se snižovat jeho finanční ohodnocení
…

Pedagogická poznámka: Vzhledem k tomu, že následující příklad nikdy nestihneme a doděláváme ho v další hodině, kontrolujeme si příklad 5 také až v další hodině a studenti mají možnost se pokusit o sehnání nějakých informací.

Př. 6: Petr jel na výlet na kole. V polovině výletu se mu kolo rozbilo. Domů se může vrátit třemi způsoby:
a) pěšky rychlostí 5 km/h
b) může za hodinu provizorně opravit kolo a vrátit se pak rychlostí 10 km/h.
c) může 2 a půl hodiny čekat na vlak a vrátit se domů rychlostí 30 km/h.
Sestav funkce, které udávají vzdálenost, kterou Petr urazil z AAmísta poruchy, v závislosti na čase od poruchy v hodinách. Při jaké vzdálenosti od domova se mu jednotlivé postupy vyplatí?

čas od poruchy v hodinách x
vzdálenost od místa poruchy v km y

a) jde pěšky
vychází ihned a každou hodinu ujde 5 km
vzdálenost po jedné hodině $1\cdot 5$
vzdálenost po dvou hodinách $2\cdot 5$
vzdálenost po *x* hodinách $x\cdot 5$
funkce $y=5x$

b) opravuje kolo
hodinu opravuje a pak každou hodinu ujede 10 km
vzdálenost po jedné hodině 0
vzdálenost po dvou hodinách $(2-1)\cdot 10$
vzdálenost po třech hodinách $(3-1)\cdot 10$
vzdálenost po *x* hodinách $(x-1)\cdot 10$
funkce $y=10(x-1)=10x-10$
Funkci je také možné sestavit tímto postupem:
každou hodinu ujede 10 km $10x$

chybí mu 10 km, které by ujel v první hodině, kterou stál $y = 10x - 10$

c) čeká na vlak

2 a půl hodiny čeká na vlak a pak každou hodinu ujede vlakem 30 km

vzdálenost po jedné hodině 0

vzdálenost po dvou hodinách 0

vzdálenost po třech hodinách $(3 - 2,5) \cdot 30$

vzdálenost po čtyřech hodinách $(4 - 2,5) \cdot 30$

vzdálenost po x hodinách $(x - 2,5) \cdot 30$

funkce $y = 30(x - 2,5) = 30x - 75$

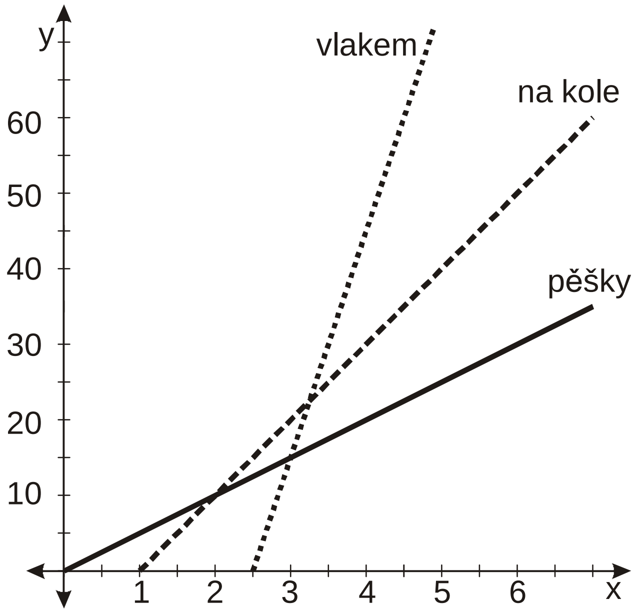
Funkci je také možné sestavit tímto postupem:

každou hodinu ujede 30 km $30x$

chybí mu 75 km, které by ujel během čekání, kdyby vlak jel ihned $y = 30x - 75$

Jaký postup se vyplatí při různých vzdálenostech od domova?

Nejvhodnější postup mu umožní dosáhnout domova za nejkratší dobu. Nakreslíme graf všech tří lineárních funkcí:



Z grafu je vidět, že pro krátké vzdálenosti je nejvýhodnější jít pěšky, pro střední vzdálenosti je nevýhodnější jet na kole a největší vzdálenosti je nejrychlejší vracet se vlakem.

Kolo je výhodnější než chůze, když funkce pro kolo má větší hodnotu než funkce pro chůzi.

Kdy mají funkce stejnou hodnotu?

$10x - 10 = 5x$

$5x = 10$

$x = 2$

Pokud by cesta trvala na kole alespoň 2 hodiny (a její délka by byla alespoň 10 km) je výhodnější než chůze opravit kolo a jet na něm.

Vlak je výhodnější než kolo, když funkce pro vlak má větší hodnotu než funkce pro kolo.

Kdy mají funkce stejnou hodnotu?

$30x - 75 = 10x - 10$

$20x = 65$

$x = 3,25$

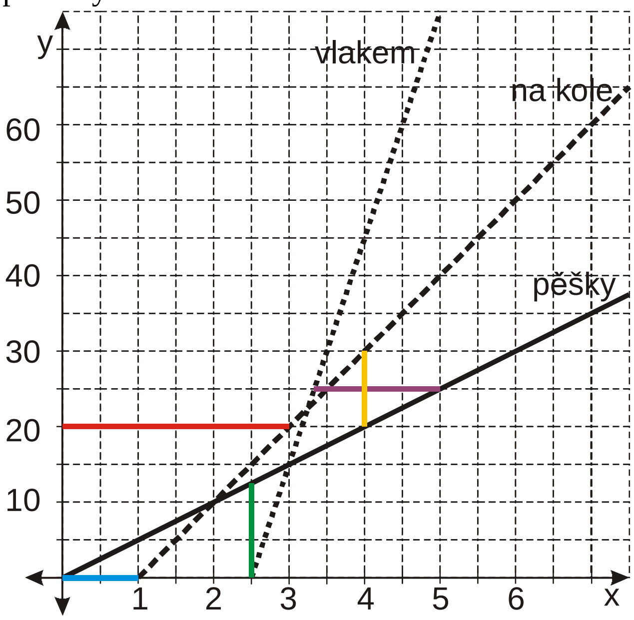
Pokud by cesta vlakem (včetně čekání) trvala alespoň 3,25 hodiny (a její délka by byla alespoň 22,5 km) je výhodnější než opravit kolo a jet na něm počkat na vlak.

Nejvýhodnější způsob dopravy:

0-10 km	chůze
10-22,5 km	kolo s opravou
22,5 a více	vlak

Pedagogická poznámka: Pokud studenti řeší příklad sami, snaží se úvodnímu rozpisu uražených drah po jednotlivých hodinách vyhnout a píšou předpisy funkcí rovnou. Na tom by nebylo nic špatného, kdyby si vymyšlené předpisy zpětně zkontrolovali, výpočtem pro některou z hodin, což nedělají. Snažím se na tomto typu zkoušky trvat. Odpovídá to logickému postupu (když mě něco napadne ozkouším si to), bohužel je to v rozporu z běžnou školskou zkušeností (vědomosti jsou zjevené vyšší mocí a proto se jim věří a nemusí se ověřovat).
Kdyby se studenti naučili během této hodiny jenom provádění takových jednoduchých kontrol (jako, že se to bohužel nenaučí), byl by to obrovský úspěch. Nezbývá než se o to snažit.

Př. 7: Na grafu pohybů z předchozího příkladu:
a) vysvětli význam vyznačených vzdálenosti
b) zjisti, ve kterém okamžiku, by měl při jízdě na kole největší náskok oproti ostatním druhům pohybu
c) jaký způsob návratu by měl Petr zvolit, kdyby byl od domova 15 km
d) jak dlouho by se jednotlivými způsoby vracel domů, kdyby byl v okamžiku poruchy 30 km od domova



a) význam vyznačených vzdáleností

- Vodorovné vzdálenosti = časové úseky v hodinách (na vodorovnou osu nanášíme čas od poruchy)
  Svislé vzdálenosti = vzdálenosti v km (na svislou osu nanášíme vzdálenosti v km)
- Modrá vzdálenost = doba, která by uplynula mezi okamžikem, kdy se Petr začal vracet pěšky a okamžikem, kdy by se začal vracet na provizorně opraveném kole (1 hodina)

- Červená vzdálenost = doba, za kterou by se Petr vrátil domů, kdyby jel na kole a od místa poruchy by se musel vracet 20 km(3 hodina)
- Fialová vzdálenost = rozdíl v dobách návratu vlakem a pěšky, kdyby Petr bydlel 25 km od místa poruchy (1 hodina a 40 minut)
- Zelená vzdálenost = vzdálenost, kterou od místa poruchy urazí Petr pěšky za 2,5 hodiny (12,5 km)
- Žlutá vzdálenost = vzdálenost, mezi místem, na které by Petr dojel za 4 hodiny na kole, a místem, na které by za 4 hodiny došel pěšky (10 km).

b) zjisti, ve kterém okamžiku, by měl při jízdě na kole největší náskok oproti ostatním druhům pohybu

Největší náskok bude mít Petr při jízdě na kole ve chvíli, kdy je přímka pro kole ve svislém směru nejvíce vzdálenost od ostatních dvou

$\Rightarrow$ přesně ve 3 hodině, má jízda na kole 5 km náskok před dopravou vlakem i chůzí

c) jaký způsob návratu by měl Petr zvolit, kdyby byl od domova 15 km

hledáme, která z přímek nejdříve protne vodorovnou čáru pro 15 km

$\Rightarrow$ nejvýhodnější je návrat na kole (2,5 hodiny)

návrat pěšky i vlakem vyjde bude trvat stejně dlouho – 3 hodiny

d) jak dlouho by se jednotlivými způsoby vracel domů, kdyby byl v okamžiku poruchy 30 km od domova

hledáme, kdy se jednotlivé přímky protnou s vodorovnou čáru pro 30 km

$\Rightarrow$

vlak 3,5 hodiny

kolo 4 hodiny

chůze 6 hodin

Shrnutí: