2.2.6 Lineární nerovnice

Předpoklady: 2205

Pedagogická poznámka: Sestavování tabulky trvá čtvrt hodiny až 20 minut. Spočítat všechny příklady stihne tak polovina studentů. Ti nejpomalejší se dokázali dopočítat až k příkladu 3. Doporučuji dojet hodinu i s pomalejšími až do konce někdy později a ostatní nechat samostatně počítat ze sbírky.

Lineární nerovnice jsou všechny rovnice, které můžeme zapsat ve tvaru $ax+b<0$ ($ax+b>0$, $ax+b\leq 0$, $ax+b\geq 0$) (neznámá je pouze v první mocnině).

Opět využijeme podobnost s lineární funkcí.
Rozebereme pouze nerovnici ve tvaru $ax+b<0$, ostatní možnosti lze rozebrat podobným způsobem:

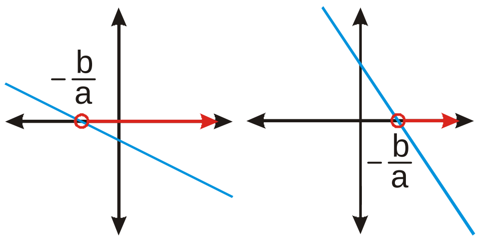
Lineární nerovnice $ax+b<0$
Hledáme, kdy je výraz $ax+b$ menší než 0.

Lineární funkce $y=ax+b$
Hledáme, kdy $y<0$ $\Rightarrow$ hledáme body grafu funkce, které leží pod osou *x* (jejich *y*-ová souřadnice je menší než nula).
Kreslíme graf funkce a hledáme, které části jsou pod osou *x*.

Řešíme nerovnici:
$ax<b=0 \quad /-b$
$ax<-b \quad /$ Chceme dělit číslem *a*. Jde to pouze, když $a\neq 0 \Rightarrow$ další postup záleží na znaménku čísla *a*.

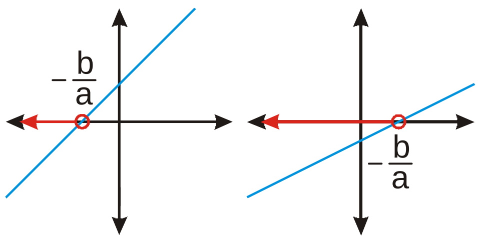
1. Předpokládáme $a<0$.
$ax<-b \quad /:a$ Dělíme záporným číslem $\Rightarrow$ obracíme znaménko.
$x>-\frac{b}{a}$
Řešením je interval $K=\left(-\frac{b}{a};\infty\right)$.

Grafy lineárních funkcí $y=ax+b$, $a<0$



2. Předpokládáme $a>0$.
$ax<-b \quad /:a$ Dělíme kladným číslem $\Rightarrow$ znaménko neobracíme.
$x<-\frac{b}{a}$
Řešením interval $K=\left(-\infty;-\frac{b}{a}\right)$.

Grafy lineárních funkcí $y=ax+b$, $a>0$



3. Pokračujeme v řešení, $a=0$.
$\Rightarrow$ Nemůžeme vydělit rovnici, ale víme, které konkrétní *a* nás zajímá $\Rightarrow$ můžeme ho dosadit.

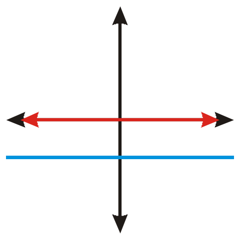
$$0\cdot x<-b$$

Výsledek záleží na hodnotě *b*.

3. a) Je-li $-b>0 \Rightarrow b<0$, řešením

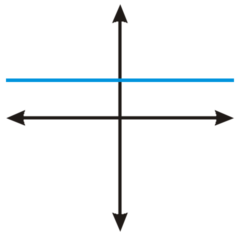
Funkce $y=b \quad b<0$

nerovnice jsou všechna reálná čísla.
$K = R$



Funkce $y = b \quad b > 0$

3. b) Je-li $-b < 0 \Rightarrow b > 0$, nerovnice nemá řešení.
$K = \emptyset$



S konkrétními čísly to bude jednodušší, učit se tabulku nazpaměť je rozhodně nesmysl.

Něco na rozehřátí:

Př. 1: Vyřeš nerovnice:
a) $2x \geq 0$ b) $-3x < 0$ c) $0x \leq 2$ d) $0x \geq 0$

a) $2x \geq 0$
$x \geq 0$
$K = \langle 0; \infty)$

b) $-3x < 0$
$x > 0$
$K = (0; \infty)$

c) $0x \leq 2$
$K = R$

d) $0x \geq 0$
$K = R$

Pedagogická poznámka: Studenti mají s předchozím příkladem rozhodně více problémů než s následujícím. Hlavně u bodů c) d) je potřeba, aby si situaci rozmysleli a „osahali“ dosazováním čísel za *x*.

Pedagogická poznámka: V posledních letech se objevuje problém i v bodě a), kde žáci nedokáží vydělit nulu dvěma. Stejně jako ve všech ostatních případech mezer z prvního stupně základní školy podle mě nezbývá nic jiného, než opakovat reálné modely podobných výpočtů, které těmto žákům zcela chybí (máš nic, to nic rozdělíš na dvě hromádky, kolik máš na každé z těchto hromádek). Je to dlouhá cesta, ale jiná šance, že začnou o matematice přemýšlet, zřejmě není.

U složitějších příkladů postupujeme podobně jako při řešení lineárních rovnic.

Př. 2: Vyřeš nerovnice:

a) $3x-7\le 5x-13$

b) $3(2+x)-(x-1)<2(x+1)$

c) $(x+1)^2-(x-1)^2+2\ge 2(x+1)$

d) $(x-2)^2\ge(x+1)(x-5)$

e) $\frac{x+1}{4}-\frac{x-3}{3}<\frac{x+4}{6}+\frac{7-3x}{12}$

a) $3x-7\le 5x-13$

$6\le 2x$

$3\le x$

$K=\langle 3;\infty)$

b) $3(2+x)-(x-1)<2(x+1)$

$6+3x-x+1<2x+2$

$0x<-5$

$K=\emptyset$

c) $(x+1)^2-(x-1)^2+2\ge 2(x+1)$

$x^2+2x+1-(x^2-2x+1)+2\ge 2x+2$

$x^2+2x+1-x^2+2x-1\ge 2x$

$4x\ge 2x$

$4x-2x\ge 0$

$2x\ge 0$

$x\ge 0$

$K=\langle 0;\infty)$

d)

$(x-2)^2\ge(x+1)(x-5)$

$x^2-4x+4\ge x^2-5x+x-5$

$-4x+4\ge -4x-5$

$0x\ge -9$

$K=R$

e) $\frac{x+1}{4}-\frac{x-3}{3}<\frac{x+4}{6}+\frac{7-3x}{12}\qquad /\cdot 12$

$3(x+1)-4(x-3)<2(x+4)+7-3x$

$3x+3-4x+12<2x+8+7-3x$

$-x+15<-x+15$

$0x<0$

$K=\emptyset$

Př. 3: Vyřeš nerovnice:

a) $\sqrt{3}x+3\ge 2-x$

b) $x+3\ge 7+\sqrt{2}x$

a) $\sqrt{3}x+3\ge 2-x$

$x+\sqrt{3}x\ge -1$

$x(1+\sqrt{3})\ge -1$

$x\ge\frac{-1}{1+\sqrt{3}}\cdot\frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-1}{1-3}=\frac{\sqrt{3}-1}{-2}=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

$K=\left\langle\frac{1-\sqrt{3}}{2};\infty\right)$

b) $x+3\ge 7+\sqrt{2}x$

$x-\sqrt{2}x\ge 4$

$x(1-\sqrt{2})\ge 4$

$x \le \frac{4}{1-\sqrt{2}}$ (číslo $1-\sqrt{2}$ je záporné)

$x \le \frac{4}{1-\sqrt{2}} \cdot \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{4\left(\sqrt{2}+1\right)}{1-2} = -4\left(\sqrt{2}+1\right)$ $K = \left(-\infty; -4\sqrt{2}-4\right\rangle$

Pedagogická poznámka: Příklad je zajímavý z hlediska paměti. Problém s odmocninou, která násobí neznámou, řešili studenti u lineárních rovnic (tedy před nedávnem). Přesto si někteří vůbec nepamatují, jak se k němu postavit. Snažím se jim vysvětlit, že stejně jako je nesmyslné učit se nazpaměť příklady, je dobré si pamatovat fígle, které pomáhají řešit problémy, na které nestačíme.

Př. 4: Vyřeš nerovnici $ax-b \ge 0$, pokud platí $a<0$. Správnost početního řešení ověř graficky.

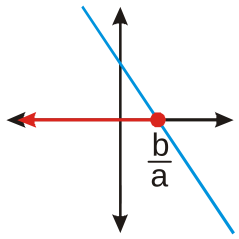
$ax-b \ge 0 \quad /+b$

$ax \ge b \quad /:a$ Dělíme záporným číslem $\Rightarrow$ obracíme znaménko.

$x \le \frac{b}{a}$ $K = \left(-\infty; \frac{b}{a}\right\rangle$

Lineární funkce $y = ax-b$, $a<0$

Řešíme nerovnici $ax-b \ge 0$ $\Rightarrow$ hledáme části grafu nad osou *x*.



$K = \left(-\infty; \frac{b}{a}\right\rangle$

Pedagogická poznámka: Někteří studenti neobrátí znaménko při dělení *a*, jiní nenakreslí graf klesající funkce. Největším problémem je ale fakt, že většina z těch, kteří udělají chybu, dojde přesto do stavu, že oběma způsoby získají stejné řešení. Obrázek zkrátka nakreslí tak, aby jim vyšlo to samé co u výpočtu.
Snažím se s tím bojovat, protože tento postup fakticky znemožňuje kontrolování. Je potřeba, aby se studenti naučili v podobných situacích „zapomenout“, k jakému výsledku došli a počítali druhým způsobem zcela od začátku.
Hodně to souvisí s tím, že studenti jenom částečně postupují podle pravidel. Nemají zažité, že pravidla jsou striktní a musí se dodržovat za všech okolností.

Př. 5: Petáková:
strana 12/cvičení 1 f) g)

Shrnutí: Řešení lineárních nerovnic je hodně podobné řešení rovnic až na obracení znaménka při násobení (dělení) záporným číslem. Větší pozornost vyžaduje závěrečná interpretace výsledku do množiny všech řešení.