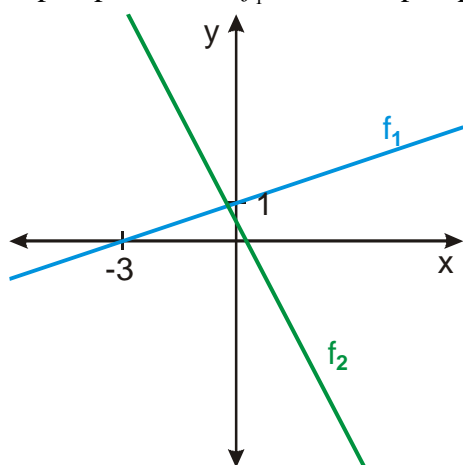


2.2.7 Soustavy lineárních nerovnic

Předpoklady: 2206

Pedagogická poznámka: První příklad je opakování, pokud se u někoho objeví problémy, je třeba je řešit před hodinou 020209.

Př. 1: Urči předpis funkce f_1 . Odhadni předpis funkce f_2 .



a)

a)

f_1 : Funkce prochází body:

- $[0,1] \Rightarrow b=1 \Rightarrow y=ax+1$,
- $[-3;0] \Rightarrow$ dosadíme do předpisu.

$$0 = a \cdot (-3) + 1$$

$$3a = 1$$

$$a = \frac{1}{3} \Rightarrow f_1: y = \frac{1}{3}x + 1$$

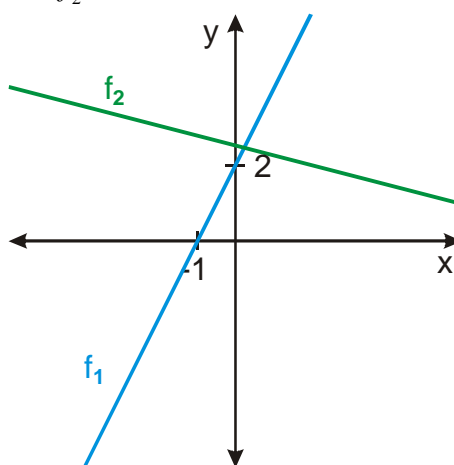
f_2 : Funkce protíná osu y mezi 0 a 1,

přibližně v polovině $\Rightarrow b \doteq \frac{1}{2}$.

Funkce je klesající, je strmější než přímka

$$y = x \Rightarrow a \doteq -2.$$

$$f_2: y \doteq -2x + \frac{1}{2}$$



b)

b)

f_1 : Funkce prochází body:

- $[0,2] \Rightarrow b=2 \Rightarrow y=ax+2$,
- $[-1;0] \Rightarrow$ dosadíme do předpisu.

$$a = 2 \Rightarrow f_1: y = 2x + 2$$

f_2 : Funkce protíná osu y poměrně blízko nad číslem 2 $\Rightarrow b \doteq 2,5$.

Funkce je klesající, je méně strmá než přímka

$$y = x \Rightarrow a \doteq -\frac{1}{2}.$$

$$f_2: y \doteq -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

Nerovnice = podmínka, kterou musí splňovat čísla dosazovaná za neznámou.

Soustava nerovnic \Rightarrow neznámá musí vyhovovat více nerovnicím (více podmínkám).

\Rightarrow Budeme řešit jednotlivé nerovnice zvlášť a do konečného řešení vybereme čísla, která splňují všechny podmínky (tedy průnik řešení obou nerovnic).

Př. 2: Vyřeš soustavu nerovnic $2x+2 \leq 0$ $3x+1 \geq 0$.

$$2x+2 \leq 0$$

$$2x \leq -2$$

$$x \leq -1$$

$$K_1 = (-\infty; -1)$$

$$3x+1 \geq 0$$

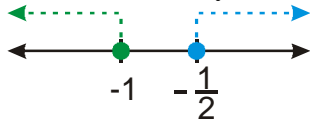
$$3x \geq -1$$

$$x \geq -\frac{1}{3}$$

$$K_2 = \left(-\frac{1}{3}; \infty\right)$$

$$K = K_1 \cap K_2 = (-\infty; -1) \cap \left(-\frac{1}{3}; \infty\right) = \emptyset$$

Obrázek může být názornější \Rightarrow zobrazíme čísla na ose:



$$K = \emptyset$$

Př. 3: Vyřeš soustavu nerovnic $\sqrt{3}x+2 \leq 0$ $\pi x+2 \leq 0$

$$\sqrt{3}x+2 \leq 0$$

$$\sqrt{3}x \leq -2$$

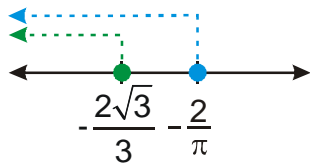
$$x \leq -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\pi x+2 \leq 0$$

$$\pi x \leq -2$$

$$x \leq -\frac{2}{\pi}$$

Zobrazíme čísla na ose:



$$K = \left(-\infty, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

Poznámka: Podstatně hezčí je předchozí příklad v situaci, kdy studenti nemají kalkulačku. Musejí pak sami odhadnout, které z čísel je menší, aby je mohli správně umístit na číselnou

osu. V této souvislosti je zajímavé, že místo usměrněného tvaru $\frac{-2\sqrt{3}}{3}$ je výhodnější tvar

neusměrněný $-\frac{2}{\sqrt{3}}$. Oba zlomky pak mají stejný číselník a porovnáním jmenovatelů zjistíme,

kteřý je větší. Některé ze studentů splete i záporné znaménko.

Př. 4: Vyřeš soustavu nerovnic $2x-7 \leq 0$ $3x+1 > 0$.

$$2x - 7 \leq 0$$

$$2x \leq 7$$

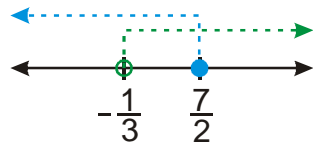
$$x \leq \frac{7}{2}$$

$$3x + 1 > 0$$

$$3x > -1$$

$$x > -\frac{1}{3}$$

Zobrazíme čísla na ose:



$$K = \left(-\frac{1}{3}, \frac{7}{2} \right)$$

Př. 5: Vyřeš bez použití obrázků následující soustavy nerovnic:

a) $x > 1$ $3x \leq -4$ b) $x < -2$ $x \leq 1$
 c) $-3x \geq 2$ $x \geq -3$

a)

$$x > 1$$

$$3x \leq -4 \Rightarrow x \leq -\frac{4}{3}$$

$$K = \emptyset$$

b)

$$x < -2$$

$$x \leq 1$$

$$K = (-\infty; -2)$$

c)

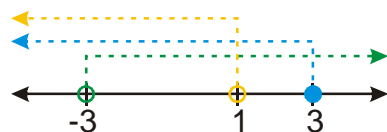
$$-3x \geq 2 \Rightarrow x \leq -\frac{2}{3}$$

$$x \geq -3$$

$$K = \left[-3; -\frac{2}{3} \right)$$

Př. 6: Vyřeš soustavu nerovnic: $x \leq 3$ $x > -3$ $x < 1$.

Tentokrát se obrázek bude hodit.



$$K = (-3; 1)$$

Pedagogická poznámka: Myslel jsem, že většina studentů sáhne po obrázku, ale téměř všichni příklad vyřešili z paměti.

Př. 7: Vyřeš soustavu nerovnic.

a) $2x - 1 \leq 3 - x < 3x + 3$

b) $2(x + \sqrt{2}) - 1 \geq 2x + 3 > 2 - 3x$

a) $2x - 1 \leq 3 - x < 3x + 3$

Zápis představuje tři nerovnice:

- $2x - 1 \leq 3 - x$,

- $3 - x < 3x + 3$,
- $2x - 1 < 3x + 3$ (tuto nerovnici řešit nemusíme, její platnost vyplývá z platnosti předchozích.

$$2x - 1 \leq 3 - x \quad / +1$$

$$2x \leq 4 - x \quad / +x$$

$$3x \leq 4 \quad / :3$$

$$x \leq \frac{4}{3} \Rightarrow K_1 = \left(-\infty, \frac{4}{3}\right)$$

$$3 - x < 3x + 3 \quad / +x$$

$$3 < 4x + 3 \quad / -3$$

$$0 < 4x \quad / :4$$

$$0 < x \Rightarrow K_2 = (0; \infty)$$

$$K = \left(0; \frac{4}{3}\right)$$

b) $2(x + \sqrt{2}) - 1 \geq 2x + 3 > 2 - 3x$

Zápis představuje tři nerovnice:

- $2(x + \sqrt{2}) - 1 \geq 2x + 3$,
- $2x + 3 > 2 - 3x$,
- $2(x + \sqrt{2}) - 1 > 2 - 3x$ (tuto nerovnici řešit nemusíme, její platnost vyplývá z platnosti předchozích.

$$2(x + \sqrt{2}) - 1 \geq 2x + 3$$

$$2x + 2\sqrt{2} - 1 \geq 2x + 3 \quad / +1 - 2\sqrt{2}$$

$$2x \geq 2x + 4 - 2\sqrt{2} \quad / -2x$$

$$0x \geq 4 - 2\sqrt{2}, \text{ protože}$$

$$4 - 2\sqrt{2} \doteq 4 - 2 \cdot 1,4 > 0, \text{ nerovnice nemá}$$

$$\text{řešení} \Rightarrow K_1 = \emptyset$$

$$K = \emptyset$$

$$2x + 3 > 2 - 3x$$

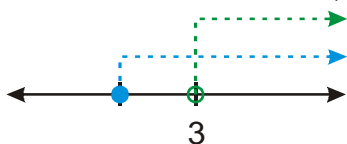
Druhou rovnici nemá smysl řešit, protože první nerovnice nemá řešení a soustava tak řešení mít také nebude.

Př. 8: Je dána soustava dvou nerovnic $ax + b > 0$ a $cx + d \geq 0$. Dopln místo parametrů (písmen) libovolná čísla tak, aby řešením soustavy byla množina:

a) $(3; \infty)$ b) $\left(-\infty; -\frac{1}{4}\right)$ c) $\left(-\frac{2}{3}; \sqrt{3}\right)$ d) $(-\infty; -2) \cup (1; \infty)$

a) $(3; \infty)$

Pokud má být řešením interval $(3; \infty)$ musí řešení nerovnic na obrázku vypadat například



takto:

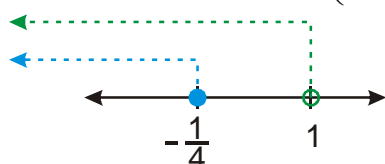
Řešení nerovnice $ax + b > 0$ (ostrá nerovnost) je zakresleno zeleně, řešení nerovnice $cx + d \geq 0$ je zakresleno modře \Rightarrow

- $x > 3 \Rightarrow ax + b = x - 3 > 0$ (v úvahu připadá i jakékoliv jiné dosazení, které vede po úpravách k nerovnici $x > 3$, například $2x - 6 > 0$),
- $x \geq 2$ (například) $\Rightarrow cx + d = x - 2 \geq 0$ (v úvahu připadá i jakékoliv jiné dosazení, které vede po úpravách k nerovnici $x \geq k$, kde k je libovolné číslo menší nebo rovno

3, například $0,5x + 1 \geq 0$, nebo dosazení, které vede na řešení $K = R$, například $0x + 1 \geq 0$).

b) $\left(-\infty; -\frac{1}{4}\right)$

Pokud má být řešením interval $\left(-\infty; -\frac{1}{4}\right)$ musí řešení nerovnic na obrázku vypadat například



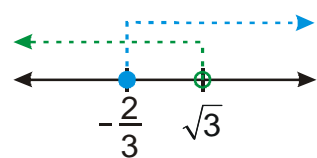
takto:

Řešení nerovnice $ax + b > 0$ (ostrá nerovnost) je zakresleno zeleně, řešení nerovnice $cx + d \geq 0$ je zakresleno modře \Rightarrow

- $x \leq -\frac{1}{4} \Rightarrow cx + d = -4x - 1 \geq 0$ (v úvahu připadá i jakékoliv jiné dosazení, které vede po úpravách k nerovnici $-\frac{1}{4} \geq x$, například $-2x - \frac{1}{2} \geq 0$),
- $x < 1$ (například) $\Rightarrow ax + b = -x + 1 > 0$ (v úvahu připadá i jakékoliv jiné dosazení, které vede po úpravách k nerovnici $x < k$, kde $k > -\frac{1}{4}$, například $-x - \frac{1}{8} > 0$, nebo dosazení, které vede k řešení $K = R$ například $0x + 5 > 0$).

c) $\left(-\frac{2}{3}; \sqrt{3}\right)$

Pokud má být řešením interval $\left(-\frac{2}{3}; \sqrt{3}\right)$ musí řešení nerovnic na obrázku vypadat takto:

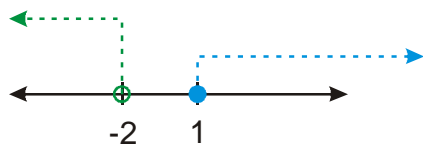


Řešení nerovnice $ax + b > 0$ (ostrá nerovnost) je zakresleno zeleně, řešení nerovnice $cx + d \geq 0$ je zakresleno modře \Rightarrow

- $x \geq -\frac{2}{3} \Rightarrow cx + d = 3x + 2 \geq 0$ (v úvahu připadá i jakékoliv jiné dosazení, které vede po úpravách k nerovnici $x \geq -\frac{2}{3}$, například $6x + 4 \geq 0$),
- $x < \sqrt{3} \Rightarrow ax + b = -x + \sqrt{3} > 0$ (v úvahu připadá i jakékoliv jiné dosazení, které vede po úpravách k nerovnici $x < \sqrt{3}$, například $-2x + 2\sqrt{3} > 0$),

d) $(-\infty; -2) \cup (1; \infty)$

Tato množina nemůže být nikdy řešením soustavy lineárních nerovnic. Zakreslíme části zadané množiny tak, jako by byly řešením jedno z nerovnic.



Každý z intervalu je řešením jedné z nerovnic, ale řešením této soustavy je prázdná množina.

Př. 9: Najdi všechny možnosti, jak může vypadat řešení soustavy dvou lineárních nerovnic s ostrou nerovností. U každé možnosti uveď příklad.

Typ řešení	Příklad
$K = \emptyset$	$x > 1, x < 0$
$K = (-\infty; a)$	$x < 2, x < 3$
$K = (a; b)$	$x > 2, x < 3$
$K = (a; \infty)$	$x > 2, x > 5$
$K = R$	$0x < 2, 0x > -3$

Pedagogická poznámka: Následující příklad je určen pouze nejlepším žákům, rozhodně ho neukazují většině třídy.

Př. 10: Vyřeš soustavu nerovnic s parametrem $2x + a < x + 3, a - 3x < 3a + x$.

$$2x + a < x + 3 \quad / -a$$

$$2x < x + 3 - a \quad / -x$$

$$x < 3 - a \Rightarrow K_1 = (-\infty; 3 - a)$$

$$a - 3x < 3a + x \quad / +3x$$

$$a < 3a + 4x \quad / -3a$$

$$-2a < 4x \quad / :4$$

$$-\frac{a}{2} < x \Rightarrow K_2 = \left(-\frac{a}{2}; \infty\right)$$

$$K = \left(-\frac{a}{2}; 3 - a\right) \text{ musí však platit, že } -\frac{a}{2} < 3 - a \text{ (aby měl zápis intervalu smysl)} \Rightarrow$$

dopočítáme, co tato podmínka znamená pro a :

$$-\frac{a}{2} < 3 - a \quad / \cdot 2$$

$$-a < 6 - 2a \quad / +2a$$

$$a < 6$$

Pokud je $a < 6$ je řešením soustavy interval $\left(-\frac{a}{2}; 3 - a\right)$. Pokud je $a \geq 6$, soustava řešení nemá.

Př. 11: Petáková:
strana 18/cvičení 38 a) b) c)

Shrnutí: Při řešení soustavy nerovnic hledáme hodnoty neznámé, které musí splnit najednou více podmínek (více nerovnic).