2.2.8 Řešení nerovnic metodou dělení definičního oboru

Předpoklady: 2207

Pedagogická poznámka: Většina následujících příkladů se normálně probírá později v kapitole „2304 Nerovnice s neznámou ve jmenovateli“. Dal jsem je co nejdříve za hodinu s úvodem do nerovnic schválně, dokud by měli mít studenti v čerstvé paměti důvody, proč se někdy znaménko obrací a někdy ne. Příklad s absolutní hodnotou je jenom další ilustrací stejného principu, kdy se čísla z s nimi způsob řešení musí rozdělit na části, abychom řešení vůbec mohli provést.
Tato hodina je asi největším oříškem za celý první ročník. Správné řešení vyžaduje, aby studenti pochopili celý poměrně dlouhý postup, včetně poměrně obecné úvahy o tom, že když něco nemůžeme udělat najednou, uděláme to nadvakrát. Právě obecné úvahy studenty příliš nezajímají a tak jsou ochotni opakovat postup zcela nesmyslně, například bez podmínek, nebo ve formě jediného sloupce. Dalším problémem je úprava, protože někteří studenti píší řešení tak ledabyle, že ani neví, do kterého sloupce podmínka patří.
V tomto případě je také zvláště obtížné najít správný okamžik, kdy ukázat studentům další kousek řešení, aby se trochu potrápili, ale nečekalo se příliš dlouho.

Připomenutí z předminulé hodiny:

$\frac{1}{x} \geq 1 \qquad / \cdot x$ chceme násobit výrazem s neznámou, který může být kladný i záporný (a kvůli tomu otáčet i neotáčet znaménko nerovnosti)

1. bereme jenom ty hodnoty *x*, pro které je číslo, kterým násobíme kladné	**2. bereme jenom ty hodnoty *x*, pro které je číslo, kterým násobíme záporné**
$x > 0$ $\frac{1}{x} \geq 1 \qquad / \cdot x$ $1 \geq x$ V nerovnici vyšla všechna čísla menší než 1, ale počítali jsme jenom s těmi, která jsou větší než nula. $K_1 = (0;1\rangle$	$x < 0$ $\frac{1}{x} \geq 1 \qquad / \cdot x$ - násobíme záporným číslem $\Rightarrow$ obracíme znaménko $1 \leq x$ V nerovnici vyšla všechna čísla větší než 1, ale počítali jsme jenom s těmi, která jsou menší než nula. Oběma podmínkám nevyhovuje žádné číslo. $K_2 = \emptyset$

Do řešení nerovnice zahrneme řešení z obou cest:

$K = K_1 \cup K_2 = (0;1\rangle \cup \emptyset = (0;1\rangle$

Př. 1: Vyřeš nerovnici: $\frac{1}{x-1} \leq 1$.

Podmínka: $x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

Potřebujeme vynásobit nerovnici výrazem $(x-1)$, může být kladný i záporný, musíme rozdělit řešení do dvou větví

$x - 1 < 0 \Rightarrow x < 1$	$x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$

(násobíme záporným číslem $\Rightarrow$ znaménko se mění)

$$\frac{1}{x-1} \le 1 \qquad /\cdot(x-1)$$

$$1 \ge x-1$$

$$2 \ge x$$

Zdá se, že řešením je interval $(-\infty;2\rangle$, počítáme s čísly $x<1$, z intervalu bereme pouze $(-\infty;1)$

$K_1 = (-\infty;1)$

(násobíme kladným číslem $\Rightarrow$ znaménko zůstává)

$$\frac{1}{x-1} \le 1 \qquad /\cdot(x-1)$$

$$1 \le x-1$$

$$2 \le x$$

Zdá se, že řešením je interval $\langle 2;\infty)$, počítáme s čísly $x>1$, to jsou všechna, co vyšla

$K_2 = \langle 2;\infty)$

$K = K_1 \cup K_2 = (-\infty;1) \cup \langle 2;\infty)$

Pedagogická poznámka: Během řešení příkladu nechávám studentům na zdi promítat opakování ze včerejší hodiny, aby si ho mohli kdykoliv připomenout.
Příklad obsahuje schválně samé jedničky, aby si studenti nemohli budovat pseudopravidla typu, „číslo ze spodu se dá do intervalů“ apod. Bez pochopení příkladu není možné v následujících příkladech rozhodnout, které ze tří čísel, kam dát.
Většina studentů napíše špatně hned podmínky. Upozorňuji je, že jsou špatně, ale správné řešení vytvořím na tabuli až za chvilku. Stejně tak musím na tabuli vypočítat jeden ze sloupců.

Př. 2: Vyřeš nerovnici: $\frac{1}{x+3} > 2$.

Podmínka: $x+3 \ne 0 \Rightarrow x \ne -3$

Potřebujeme vynásobit nerovnici výrazem $(x+3)$, může být kladný i záporný $\Rightarrow$ musíme rozdělit řešení do dvou větví

$x+3<0 \Rightarrow x<-3$

(násobíme záporným číslem $\Rightarrow$ znaménko se mění)

$$\frac{1}{x+3} > 2 \qquad /\cdot(x+3)$$

$$1 < 2(x+3)$$

$$1 < 2x+6$$

$$-5 < 2x$$

$$-\frac{5}{2} < x$$

Zdá se, že řešením je interval $\left(-\frac{5}{2};\infty\right)$, počítáme s čísly $x<-3$, v intervalu není žádné takové

$K_1 = \emptyset$

$x+3>0 \Rightarrow x>-3$

(násobíme kladným číslem $\Rightarrow$ znaménko zůstává)

$$\frac{1}{x+3} > 2 \qquad /\cdot(x+3)$$

$$1 > 2(x+3)$$

$$1 > 2x+6$$

$$-5 > 2x$$

$$-\frac{5}{2} > x$$

Zdá se, že řešením je interval $\left(-\infty;-\frac{5}{2}\right)$, počítáme s čísly $x>-3$, získáme interval $\left(-3;-\frac{5}{2}\right)$

$K_2 = \left(-3;-\frac{5}{2}\right)$

$K = K_1 \cup K_2 = \left(-3; -\frac{5}{2}\right)$

Pedagogická poznámka: Studenti, kteří metodu nechápou, většinou dosazují jako hranu intervalů číslo $x = 3$.

Př. 3: Vyřeš nerovnici: $\frac{4}{6-3x} \leq 2$.

Podmínka: $6-3x \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$

Potřebujeme vynásobit nerovnici výrazem $(6-3x)$, může být kladný i záporný, musíme rozdělit řešení do dvou větví

$6-3x<0 \Rightarrow 6<3x \Rightarrow x>2$ (násobíme záporným číslem $\Rightarrow$ znaménko se mění) $\frac{4}{6-3x} \leq 2 \quad / \cdot (6-3x)$ $4 \geq 2(6-3x)$ $4 \geq 12-6x$ $6x \geq 8$ $x \geq \frac{4}{3}$ Zdá se, že řešením je interval $\left\langle \frac{4}{3}; \infty \right)$, počítáme s čísly $x>2$, řešením jsou všechna čísla, se kterými počítáme $K_1 = (2; \infty)$	$6-3x>0 \Rightarrow 6>3x \Rightarrow x<2$ (násobíme kladným číslem $\Rightarrow$ znaménko zůstává) $\frac{4}{6-3x} \leq 2 \quad / \cdot (6-3x)$ $4 \leq 2(6-3x)$ $4 \leq 12-6x$ $6x \leq 8$ $x \leq \frac{4}{3}$ Zdá se, že řešením je interval $\left(-\infty; \frac{4}{3}\right\rangle$, počítáme s čísly $x<2$, to jsou všechna, co vyšla $K_2 = \left(-\infty; \frac{4}{3}\right\rangle$

$K = K_1 \cup K_2 = \left(-\infty; \frac{4}{3}\right\rangle \cup (2; \infty)$

; +

Pedagogická poznámka: Studenti, kteří nechápou metodu, většinou obracejí znaménka v opačných sloupcích. Jen vzácně jde o nepozornost.

Př. 4: Vyřeš nerovnici: $\frac{4x}{2x+1} \leq 2$.

Podmínka: $2x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -\frac{1}{2}$

Potřebujeme vynásobit nerovnici výrazem $(2x+1)$, může být kladný i záporný, musíme rozdělit řešení do dvou větví

$2x+1<0 \Rightarrow x<-\frac{1}{2}$ (násobíme záporným číslem) $\frac{4x}{2x+1} \leq 2 \quad / \cdot (2x+1)$	$2x+1>0 \Rightarrow x>-\frac{1}{2}$ (násobíme kladným číslem) $\frac{4x}{2x+1} \leq 2 \quad / \cdot (2x+1)$

$4x \geq 2(2x+1)$ $4x \geq 4x+2$ $0 \geq 2$ - neplatí nikdy $K_1 = \emptyset$	$4x \leq 2(2x+1)$ $4x \leq 4x+2$ $0 \leq 2$ - platí vždy, ale počítáme pouze s $x > -\frac{1}{2}$ $K_2 = \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$

$K = K_1 \cup K_2 = \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$

Př. 5: Vyřeš nerovnici: $\lvert x-1 \rvert \geq 1$.

Absolutní hodnota, něco úplně jiného než dosud, ale podobný problém:
kladné číslo absolutní hodnota nemění
zápornému číslu absolutní hodnota změní znaménko
$\Rightarrow$ řešení se rozpadá na dvě části, podle toho, zda je uvnitř absolutní hodnoty kladné nebo záporné číslo $\Rightarrow$ záleží na výrazu $x-1$

$x-1<0 \Rightarrow x<1$ (uvnitř absolutní hodnoty záporné číslo $\Rightarrow$ obracíme znaménko vynásobením číslem -1) $\lvert x-1 \rvert \geq 1$ $-(x-1) \geq 1$ $-x+1 \geq 1$ $-x \geq 0$ $x \leq 0$ Zdá se, že řešením je interval $(-\infty; 0\rangle$, počítáme s čísly $x<1 \Rightarrow$ interval bereme celý $K_1 = (-\infty; 0\rangle$	$x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$ (uvnitř absolutní hodnoty kladné číslo $\Rightarrow$ absolutní hodnotu vypustíme beze změn) $\lvert x-1 \rvert \geq 1$ $x-1 \geq 1$ $x \geq 2$ Zdá se, že řešením je interval $\langle 2; \infty)$, počítáme s čísly $x \geq 1 \Rightarrow$ interval bereme celý $K_2 = \langle 2; \infty)$

$K = K_1 \cup K_2 = (-\infty; 0\rangle \cup \langle 2; \infty)$

Pedagogická poznámka: Doporučuji v případě pomalejšího postupu vynechat čtvrtý příklad, aby došlo na příklad s absolutní hodnotou. Velká část studentů v případě klasické výuky chápe nerovnice s absolutní hodnotou jako zcela jinou část matematicky než nerovnice v podílovém tvaru. Ve skutečnosti v obou případech uplatňujeme stejný princip – rozdělení všech hodnot, se kterými počítáme na dvě skupiny a tím otevření cesty dalšímu postupu.

Př. 6: Petáková:
strana 14/cvičení 19 b)

Shrnutí: