2.2.11 Slovní úlohy vedoucí na lineární rovnice II

Předpoklady: 2210

Př. 1: Jarda dostává od zaměstnavatele každý měsíc *k* stravenek v hodnotě 50 Kč. Zapiš výrazem kolik peněz může utratit za obědy:
a) každý měsíc,
b) tento měsíc, pokud mu ještě 5 stravenek zbylo z minulého měsíce,
c) každý měsíc, pokud se hodnota stravenek zvýší o 10 Kč,
d) každý měsíc, pokud se hodnota stravenek zvýší o 10 Kč a jejich počet se sníží o 3.

a) každý měsíc
$50 \cdot k$ (*hodnota stravenky · počet stravenek*)
b) tento měsíc, pokud mu ještě 5 stravenek zbylo z minulého měsíce
$50 \cdot (k+5)$
c) každý měsíc, pokud se hodnota stravenek zvýší o 10 Kč
$(50+10) \cdot k = 60k$
d) každý měsíc, pokud se hodnota stravenek zvýší o 10 Kč a jejich počet se sníží o 3
$(50+10)(k-3) = 60(k-3)$

Př. 2: Otec s dcerou šli na výlet. Otcův krok měří 80 cm, dcera je ještě malá a jeden krok má dlouhý pouze 50 cm. Jak dlouhý byl výlet, když dcera ušla o tři tisíce kroků více než otec.

Počet kroků otce … k
Počet kroků dcery … $k+3000$
Vzdálenost, kterou ušli … v
Otec ušel $v = 0,8k$
Dcera ušla $v = 0,5(k+3000)$

$0,8k = 0,5(k+3000)$
$0,8k = 0,5k + 1500$
$0,3k = 1500$
$k = \frac{1500}{0,3} = 5000$ $\Rightarrow$ Otec ušel 5000 kroků.
$v = 0,8k = 0,8 \cdot 5000 = 4000$
Výlet byl dlouhý 4000 m.

Pedagogická poznámka: Nejčastější chyba je uvedena v následujícím příkladu jako bod a). Někteří studenti spočítají pouze počet kroků a zapomenou z něj vypočítat ušlou vzdálenost.

Př. 3: Následující rovnice jsou neúspěšnými pokusy o vyřešení předchozího příkladu. Pokus se je interpretovat a oprav chyby, které se v nich vyskytují.
a) $0,8k = 3000 + 0,5k$ b) $0,8k_o = 0,5(k_d + 3000)$

c) $0,8k_o + 0,5k_d + 3000 = v$ d) $0,8k + 0,5(k + 3000) = v$

e) $\frac{v}{0,8} = \frac{v}{0,5} + 3000 \cdot 0,5$

a) $0,8k = 3000 + 0,5k$

Pokus je podobný výše použitému řešení. Výrazy $0,8k$ a $0,5k$ mají význam vzdáleností (délka kroku * počet kroků) a nemůžeme je sčítat s kroky $\Rightarrow$ správně $0,8k = 0,5 \cdot 3000 + 0,5k$.

b) $0,8k_o = 0,5(k_d + 3000)$

Opět pokus o klasické řešení, porovnáním vzdálenosti, kterou ušel otec a dcera.
Chyba vznikla asi snahou udělat dva kroky najednou.
Správně:

$0,8k_o = 0,5k_d$ (otec ušel stejně jako dcera)

$0,8k_o = 0,5(k_o + 3000)$ (dcera udělala o 3000 kroků víc)

c) $0,8k_o + 0,5k_d + 3000 = v$

Několik chyb: Opět se sčítá vzdálenost s kroky jako v prvním případě. Navíc rovnice nepopisuje realitu, vzdálenost, kterou výletníci, ušli počítá jako součet vzdálenosti, kterou ušel otec, a vzdálenosti, kterou ušla dcera (nesmysl), ke které navíc přičítá počet kroků. Spíše než pokus o logické vyřešení příkladu, jde o sestavení libovolné rovnice, která obsahuje všechny údaje ze zadání.

d) $0,8k + 0,5(k + 3000) = v$

Dobře napsaná rovnice popisující špatný předpoklad: vzdálenost ušlá otcem + vzdálenost ušlá dcerou = délka výletu.
Správná úvaha: vzdálenost ušlá otcem = vzdálenost ušlá dcerou = délka výletu.

$0,8k = 0,5(k + 3000) = v$

e) $\frac{v}{0,8} = \frac{v}{0,5} + 3000 \cdot 0,5$

Zajímavý nápad, umožňuje určit rovnou délku výletu.

Výraz $\frac{v}{0,8}$ určuje počet kroků, které ušel otec,výraz $\frac{v}{0,5}$ počet kroků dcery $\Rightarrow$ v rovnici nemůže vystupovat výraz $3000 \cdot 0,5$ (vzdálenost ušlá dcerou při 3000 krocích), musí tam být pouze počet 3000 kroků.

Vztah mezi počtem kroků otce a dcery je obrácený: $k_o + 3000 = k_d \Rightarrow \frac{v}{0,8} + 3000 = \frac{v}{0,5}$.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad má svůj význam. Právě fakt, že studenti sestavují rovnice zcela odtrženě od jakéhokoliv významu a bez jakékoliv kontroly, vede k tomu, že slovní úlohy řešit neumějí. Snažím se je dovést k tomu, že nejdůležitější je sestavovat rovnice podle reality a umět zkontrolovat význam každého výrazu v nich.
Dalším vodítkem je v podstatě fyzikální pravidlo, že sčítat je možné pouze stejné věci (vzdálenosti mezi sebou, kroky mezi sebou, ale ne obojí dohromady).

Př. 4: V maturitním ročníku jsou dvě třídy. Ve třídě A z 25 studentů neudělalo maturitu 8 %. Celkově v ročníku při maturitách neuspělo 12,5 % studentů? Kolik procent studentů neuspělo u maturit ve třídě 4.B, jestliže do ní chodilo 23 žáků? Pokus se najít řešení, ve kterém nebudeš určovat počty propadajících žáků v obou třídách.

Počet žáků propadajících v třídě A … $25 \cdot 0,08$
Počet žáků propadajících ve škole … $48 \cdot 0,125$
Počet žáků propadajících v třídě B … $23 \cdot x$

Studenti propadající ve škole = studenti propadající v 4.A + studenti propadající v 4.B.
$48 \cdot 0,125 = 25 \cdot 0,08 + 23 \cdot x$
$$x = \frac{48 \cdot 0,125 - 25 \cdot 0,08}{23} = 0,174$$
Ve třídě 4.B propadlo 17,4% studentů.

Řešení předchozího příkladu využívá **Zákon zachování propadlíků**: Počet propadajících studentů ve škole se zachovává, ať už jej určujeme sčítáním za jednotlivé třídy nebo za celou školu najednou.

Př. 5: Najdi jiné vyjádření Zákona zachování propadlíků.

Počet propadlíků ve škole získáme sečtením počtu propadlíků v jednotlivých třídách.
Kdo propadne ve své třídě, propadá i ve své škole.
Sehnáním tříd dohromady se počet propadlíků nezmění.
Propadlíků je stejně v jednotlivých třídách dohromady jako v celé škole.
…

Zákon zachování propadlíků je speciálním příkladem zákona **zachování něčeho během dávání (smíchávání) věcí (látek) dohromady**. V takovém případě sečteme množství před smícháním a získané celkové množství se rovná množství po smíchání.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad a všechny zbývající v této hodině, jsou postaveny na tom, že sledujeme množství něčeho, co zůstává po celou dobu stejné („propadlíků“ v předchozím příkladu, čistých kyselin v následujících). To je logický postup a snažím se ho studentům předat.
Naopak bojuji proti používání směšovacích rovnic nebo křížových pravidel. Oblast jejich použití je z hlediska typologie příkladů malá (i když tam spadá většina chemických aplikací), přínos z hlediska logického přemýšlení nebo schopnosti řešit slovní úlohy nulový (nebo spíš podobně jako u vzorců pro procenta záporný, neboť sugerují studentům představu, že je správně něco počítat a nevědět proč).

Př. 6: Smícháním 6 litrů 50% kyseliny octové a 3 litrů 8% kyseliny octové vznikl nový roztok této kyseliny. Urči jeho koncentraci.

Koncentrace výsledného roztoku … x

Čistá kyselina v 1. roztoku + čistá kyselina v 2. roztoku = čistá kyselina ve výsledném roztoku: $6 \cdot 0,5 + 3 \cdot 0,08 = 9x$
$3 + 0,24 = 9x$
$3,24 = 9x$
$x = 0,36$

Výsledný roztok má koncentraci 36%.

Pedagogická poznámka: Opět nejčastější chyba $6\cdot 0,5+3\cdot 0,08=x$. Je třeba trvat na tom, aby rovnice měla význam.

Př. 7: Kolik kg 96% roztoku kyseliny sírové musíme přilít k 9 kg 8% roztoku této kyseliny, abychom dostali její 60% roztok?

Hmotnost přilévaného 96% roztoku ... k
Hmotnost výsledného 60% roztoku … v

Hmotnost 96% roztoku + hmotnost 8% roztoku = hmotnost výsledného 60% roztoku:
$k+9=v$.
Čistá kyselina v 96% roztoku + čistá kyselina v 8% roztoku = čistá kyselina ve výsledném 60 % roztoku: $0,96k+9\cdot 0,08=0,6v$.
Dosadíme za *v* do druhé rovnice:

$0,96k+9\cdot 0,08=0,6(9+k)$

$0,96k+0,72=5,4+0,6k$

$0,96k-0,6k=5,4-0,72$

$0,36k=4,68$

$k=13$

Je třeba přilít 13kg 96% roztoku kyseliny sírové.

Pedagogická poznámka: Většina studentů sestaví ihned rovnici $0,96k+9\cdot 0,08=0,6(9+k)$, což je samozřejmě v pořádku.

Př. 8: Kolika gramy vody musíme zředit 300g 40% kyseliny dusičné, aby zředěná kyselina měla koncentraci 15%?

Množství přilité vody … v
Množství výsledného roztoku … r

Hmotnost 30% roztoku + hmotnost vody = hmotnost výsledného roztoku: $300+v=r$.
Čistá kyselina v 30% roztoku + čistá kyselina ve vodě (0% roztok) = čistá kyselina ve výsledném 15 % roztoku: $0,4\cdot 300+0\cdot v=0,15(300+v)$.

$120+0=45+0,15v$

$0,15v=75$

$v=500$

Kyselinu musíme zředit 500g vody.

Pedagogická poznámka: Nejčastější chyba vypadá takto: $0,4\cdot 300+1\cdot v=0,15(300+v)$ - do rovnice pro 100% čistou kyselinu se přidá voda. Vysvětlujeme si, že jde opět o sčítání různých věcí dohromady.

Př. 9: Vyřeš předchozí příklad pomocí zachování čisté vody během smíchávání (místo zachování čisté kyseliny dusičné.

40% roztok kyseliny ve vodě = 60% roztok vody v kyselině
15% roztok kyseliny ve vodě = 85% roztok vody v kyselině

Čistá voda v 30% roztoku + čistá voda ve vodě (100% roztok) = čistá voda ve výsledném 15 % roztoku: $300 \cdot 0,6 + v \cdot 1 = 0,85(v + 300)$.

$180 + v = 0,85v + 255$

$v - 0,85v = 255 - 180$

$0,15v = 75$

$v = 500$

Kyselinu musíme zředit 500g vody.

Př. 10: Petáková:
strana 19/cvičení 55
strana 19/cvičení 56
strana 19/cvičení 57

Shrnutí: V rovnicích, které sestavujeme při řešení slovních úloh, můžeme sčítat a porovnávat pouze členy se stejným významem.