2.2.12 Slovní úlohy vedoucí na lineární rovnice III

Předpoklady: 2211

Pedagogická poznámka: Příklady na míchání směsí jsou do dvou hodin rozděleny schválně. Snažím se tak zvýšit šanci, že si hlavní myšlenku žáci zapamatují.

Př. 1: Jakou hlavní myšlenku používáme při řešení příkladů na vytváření směsí?

Při smíchání se množství čisté látky (čehokoliv dalšího, co se vyplatí sledovat) zachovává.

Př. 2: Sestav rovnice, pro řešení následujících příkladů. Rovnice neřeš.
a) Smícháme 2 litry 40 % roztoku a 3 litry 15 % roztoku. Urči koncentraci výsledného roztoku.
b) Kolik ml 80 % kyseliny musíme přidat do 20 ml 12 %, abychom získali roztok o koncentraci 20 %?
c) Smícháním 5 l roztoku o koncentraci 20 %, 2 l čisté vody a 1 l roztoku o neznámé koncentraci jsme získali roztok o koncentraci 18 %. Urči koncentraci neznámého roztoku.
d) Koncentrace alkoholu v 15 l kvasu klesla během destilace z 12 % na 5 %. Kolik lihu jsme vydestilovali?

a) Smícháme 2 litry 40 % roztoku a 3 litry 15 % roztoku. Urči koncentraci výsledného roztoku.
$2\cdot 0,4+3\cdot 0,15=5\cdot x$
b) Kolik ml 80 % kyseliny musíme přidat do 20 ml 12 %, abychom získali roztok o koncentraci 20 %?
$x\cdot 0,80+20\cdot 0,12=(20+x)\cdot 0,20$
c) Smícháním 5 l roztoku o koncentraci 20 %, 2 l čisté vody a 1 l roztoku o neznámé koncentraci jsme získali roztok o koncentraci 18 %. Urči koncentraci neznámého roztoku.
$5\cdot 0,20+2\cdot 0+1\cdot x=(5+2+1)\cdot 0,18$
d) Koncentrace alkoholu v 15 l kvasu klesla během destilace z 12 % na 5 %. Kolik lihu jsme vydestilovali?
$x\cdot 1=15\cdot 0,12-(15-x)\cdot 0,05$

Př. 3: Vymysli k následujícím rovnicím slovní zadání na míchání směsí.
a) $x\cdot 0,4+2\cdot 0,1=(x+2)\cdot 0,25$ b) $2\cdot x+3\cdot 0,55=5\cdot 0,35$
c) $0,3\cdot 0,4+x\cdot 0,1=(0,3+x)\cdot 0,32$ d) $x\cdot 0,2+(x+1)\cdot 0,5=(2x+1)\cdot 0,35$
e) $0,3\cdot x+0,2\cdot 1,2=(0,2+0,3)\cdot 0,75$

a) $x\cdot 0,4+2\cdot 0,1=(x+2)\cdot 0,25$
Kolik 40 % roztoku musíme smíchat s 2 litry 10 % roztoku, abychom získali 25 % roztok?
b) $2\cdot x+2\cdot 0,55=4\cdot 0,25$
5 litrů 35% roztoku jsme získali smícháním 3 litrů roztoku o koncentraci 55 % a 2 litrů roztoku o neznámé koncentraci. Urči koncentraci neznámého roztoku.

c) $0,3\cdot 0,4 + x\cdot 0,1 = (0,3 + x)\cdot 0,32$

Kolik litrů 10 % roztoku musíme přidat k 0,3 litru 40 % roztoku, abychom získali 32 % roztok?

d) $x\cdot 0,2 + (x+1)\cdot 0,5 = (2x+1)\cdot 0,35$

35 % roztok jsme získali smícháním roztoku 20 % a 50 %. 50 % roztoku jsme použili o 1 litr více. Kolik obou roztoků jsme použili?

e) $0,3\cdot x + 0,2\cdot 1,2 = (0,2+0,3)\cdot 0,75$

Předchozí rovnice nevyjadřuje smíchávání směsí. Čísla 0,2 a 0,3 by měla vyjadřovat množství směsí (vystupují na levé straně a na pravé je v závorce jejich součet) $\Rightarrow$ číslo 1,2 by mělo představovat koncentraci směsi, ale ta nemůže být větší než 1.

Př. 4: V mlékárně vyrábějí polotučné mléko (s obsahem 1,5% tuku) tak, že z tučného mléka (s obsahem 4% tuku) odstředěním část tuku odeberou. Z kolika kilogramů tučného mléka vyrobí 1 tunu mléka polotučného?

Hmotnost tučného mléka … x

Protože množství tuku se během odtučnění změní (část ho odeberou), nemůžeme příklad počítat přes zachování množství tuku. Vyjdeme ze zachování množství čistého mléka bez tuku.

Koncentrace čistého mléka v tučném mléku: $1-0,04=0,96$.

Koncentrace čistého mléka v polotučném mléku: $1-0,015=0,985$.

Čisté mléko před odstředěním = čisté mléko po odstředění: $0,96x = 0,985\cdot 1000$.

$0,96x = 985$

$x = 1026$

Z 1026 kg tučného mléka vyrobí v mlékárně 1000 kg mléka polotučného.

Pedagogická poznámka: Ke správnému řešení se studenti dostanou pouze přes dvě překážky:

Musí si uvědomit, že nemohou použít na sestavování rovnice tuk, protože se mění jeho množství.

Musí si uvědomit, že po celou dobu zůstává stejné množství čistého (odtučněného mléka).

Př. 5: Nádoba na 30 litrů vody se má naplnit vodou o teplotě 30°C. Kolik litrů vody o teplotě 80°C a kolik litrů vody o teplotě 20°C se musí smíchat?

Množství vody o teplotě 80°C … t

Množství vody o teplotě 20°C … s

Voda 80°C + voda 20°C = voda v nádobě: $t+s=30 \Rightarrow t=30-s$.

Teplo ve vodě 80°C + teplo ve vodě 20°C = teplo ve vodě voda 30°C:

$80t + 20s = 30\cdot 30$.

$80(30-s) + 20s = 900$

$2400 - 900 = 80s - 20s$

$1500 = 60s$

$s = 25$

Počet litrů vody o teplotě $80°C$: $t + 25 = 30 \Rightarrow t = 5$.

Bude třeba 5 litrů 80°C a 25 litrů 20°C vody.

Pedagogická poznámka: Následující příklady patří do skupiny příkladů na společnou práci. Termín nezavádím. Existují příklady, kde spolu lidé společně pracují, a řeší se úplně jinak.

Př. 6: Jeden kopáč by vykopal příkop pro telefonní vedení za 6 hodin. Druhý by vykopal tentýž příkop za 3 hodiny. Jak dlouho by jim vykopání příkopu trvalo, kdyby pracovali společně?

Doba na vykopání příkopu … x

Základní fígl na příklady, které se zabývají splněním úkolu:

1. kopáč vykope vše za 6h $\Rightarrow$ za 1h vykope $\frac{1}{6}$ práce.

2. kopáč vykope vše za 3h $\Rightarrow$ za 1 h vykope $\frac{1}{3}$ práce.

1. kopáč vykope za x hodin: $x\left(\frac{1}{6}\right)$ práce.

2. kopáč vykope za x hodin: $x\left(\frac{1}{3}\right)$ práce.

Práce, kterou vykoná 1 kopáč, + práce, kterou vykoná 2 kopáč, je celá práce:

$$x\left(\frac{1}{6}\right)+x\left(\frac{1}{3}\right)=1 \quad /\cdot 6$$
$$x+2x=6$$
$$3x=6$$
$$x=2$$

Oba kopáči spolu vedení vykopou za 2 hodiny.

Pedagogická poznámka: Většina žáků si s předchozím příkladem neví rady. Jako první radu píšu část práce, kterou vykonají oba kopáči za jednu hodinu. Mnoha žákům to stačí, další radím označit si počet hodin x a zapsat, jakou část práce vykonají kopáči za tuto dobu. Pak už píšeme rovnici společně na tabuli. Nejčastější chybou je rovnice $\frac{x}{6}+\frac{x}{3}=x$, kde řešíme jaký je význam jednotlivých členů v rovnici (vlevo část práce, vpravo hodiny). Jako užitečné vidím i dosazení výsledku do rovnice a interpretaci členů ($\frac{2}{6}+\frac{2}{3}=1$ - práce první + práce druhého = celá práce).

Př. 7: Rybník se vypustí větším stavidlem za 10 dní, menším za 12 dní. Letos jej vypouštěli tak, že první čtyři dny otevřeli jen větší stavidlo, teprve pak otevřeli také stavidlo menší. Urči dobu, kterou trvalo vypouštění rybníku letos.

Větším stavidlem 10 dní $\Rightarrow$ za 1 den vypustí $\frac{1}{10}$ rybníka.

Menším stavidlem12 dní $\Rightarrow$ za 1 den vypustí $\frac{1}{12}$ rybníka.

Doba, po kterou je otevřeno větší stavidlo … x.

Část rybníka vypuštěná větším stavidlem + část vypuštěná menším stavidlem = celý rybník:

$x\left(\frac{1}{10}\right)+(x-4)\left(\frac{1}{12}\right)=1 \quad /\cdot 60$ (menší stavidlo se otevře až čtyři dny po velkém).

$6x+(x-4)5=60$

$6x+5x-20=60$

$11x=80$

$x=\frac{80}{11}\doteq 7,27$

Jiné řešení:

Nejdříve bylo 4 dny otevřené větší stavidlo $\Rightarrow$ vypustilo: $4\cdot\frac{1}{10}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$ rybníka $\Rightarrow$ zbývá vypustit $\frac{3}{5}$ objemu rybníka.

Obě stavidla vypustí za 1 den: $\frac{1}{10}+\frac{1}{12}=\frac{11}{60}$ objemu.

$\frac{11}{60}$ práce … 1 den

$\frac{3}{5}$ práce … x dní

$$\frac{x}{\frac{3}{5}}=\frac{1}{\frac{11}{60}}\Rightarrow x=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{11}{60}}=\frac{3\cdot 60}{5\cdot 11}=3,\overline{27} \text{ dní}$$

Musíme však přičíst 4 dny, po které bylo otevřeno první stavidlo: $3,\overline{27}+4=7,27$ dní.
Rybník se vypustí přibližně za 7, 27 dne.

Pedagogická poznámka: Správně je také rovnice $(x+4)\left(\frac{1}{10}\right)+x\left(\frac{1}{12}\right)=1$. Určíme tak čas, po který bylo otevřeno menší stavidlo, a k výsledku musíme přičíst čtyřku, abychom odpověděli na dotaz v zadání.

Často se objevuje i rovnice: $4\frac{1}{10}+x\left(\frac{1}{10}\right)+x\left(\frac{1}{12}\right)=1$. Je dobré si rovnice napsat na tabuli a zkusit si je všechny přečíst, aby studenti viděli, že jde stále o naplnění stejné základní myšlenky, kdy části vypuštěné jednotlivými stavidly musí dohromady dát celý rybník.

Překvapilo mě, kolik studentů dokázalo příklad samostatně spočítat.

Př. 8: Mistr společně s učedníkem postaví zeď za 20 hodin. Mistr sám by tuto práci vykonal za 30 hodin. Jak dlouho by zeď stavěl samotný učedník?

Mistr 30 hodin $\Rightarrow$ za 1 hodinu $\frac{1}{30}$ práce.

Oba dva 20 hodin $\Rightarrow$ za 1 hodinu $\frac{1}{20}$ práce.

Učedník x hodin $\Rightarrow$ za 1 hodinu $\frac{1}{x}$ práce.

Část udělaná za 1 hodinu mistrem + část udělaná za 1 hodinu učedníkem = část udělaná za 1 hodinu dohromady: $\frac{1}{30}+\frac{1}{x}=\frac{1}{20} \quad / \cdot 60x$.

$2x+60=3x$

$x=60$

Jiný postup řešení:

Práce udělaná mistrem + práce udělaná učedníkem = celá práce.

$20\left(\frac{1}{30}\right)+20\left(\frac{1}{x}\right)=1 \quad / \cdot 30x$ (oba pracují 20 hodin)

$20x+600=30x$

$10x=600$

$x=60$

Samotný učedník by zeď postavil za 60 hodin.

Pedagogická poznámka: Řešení tohoto příklad dopadá často katastrofálně. I když jde o stejný příklad jako 1 (pouze neznáme jinou veličinu) studenti nejsou schopni rovnici sestavit.

Mám pocit, že problém spočívá v tom, že studenti se hlavně snaží vyřešit příklad a méně už popsat rovnicí realitu. Snažím se jim vysvětlit, že největší přínos proměnné tkví v tom, že nám umožňuje popsat rovnicí skutečnost i v případech, kdy neznáme její hodnotu. Jakmile přistupujeme k příkladu tímto způsobem není mezi ním a prvním příkladem rozdíl, neznámá se pouze vyskytuje na jiném místě.

Pedagogická poznámka: Několikrát jsem se setkal s rovnicí $\frac{x}{20}-\frac{x}{30}=1$, která je sice správná, ale dost obtížně se interpretuje. Jde v podstatě o to, že v ní od toho, kolikrát by za dobu, za kterou by práci udělali oba společně, odečteme, kolikrát by práci vykonal za tuto dobu mistr, a tím získáme jedničku, která reprezentuje skutečnost, že učedník za tuto dobu práci udělá právě jednou. Pokud žák rovnici není schopen slovně popsat, nepovažuji jeho řešení za zcela správné.

Př. 9: Petáková:
strana 19/cvičení 47
strana 19/cvičení 53
strana 19/cvičení 54

Shrnutí: Při řešení slovních úloh na smíchávání vycházíme z toho, že se množství něčeho zachovává.