

2.3.1 Rovnice v součinném tvaru

Předpoklady: 1710, 2203

Pedagogická poznámka: Hodina obsahuje poměrně dost příkladů (20). I když je někteří stihli vypočítat, mám trochu obavu, zda postup nebyl příliš rychlý. Pokud by se mělo něco vynechávat, doporučoval bych část příkladu 5, kde jde v podstatě pouze o opakování rozkladů na součin.

Řešíme rovnici: $(x+3)(2x-1)=0$.

Obě strany rovnice jsou čísla:

- Pravá strana = nula.
- Levá strana = součin čísel (závorka znamená číslo), který má vyjít 0 (aby platila rovnice).

⇒ 2 možnosti:

- Ani jedno z čísel v součinu na levé straně není 0 ⇒ součin také není 0 ⇒ rovnice nevyjde.
- Alespoň jedno číslo v součinu je 0 ⇒ součin je 0, bez ohledu na ostatní čísla ⇒ rovnice vyjde.

⇒ Zjistíme, pro která x se jednotlivé závorky rovnají 0, a máme kořeny rovnice.

Př. 1: Vyřeš rovnici $(x+3)(2x-1)=0$.

První závorka se rovná nule:

$$x+3=0$$

$$x=-3$$

Druhá závorka se rovná nule:

$$2x-1=0$$

$$2x=1$$

$$x=\frac{1}{2}$$

$$K = \left\{ -3, \frac{1}{2} \right\}$$

Mohli bychom stejným způsobem řešit rovnici $(x+3)(2x-1)=1$?

Záleží na tom, jak můžeme získat 1 jako součin dvou čísel: nekonečně mnoho způsobů

(například $1=1 \cdot 1$, $1=2 \cdot \frac{1}{2}$, $1=3 \cdot \frac{1}{3}$, ...) ⇒ nemůžeme o žádné ze závorek prohlásit, že se

určitě rovná nějakému číslu ⇒ takto rovnici bez nuly na pravé straně nespočítáme.

Řešením rovnice v součinném tvaru (s nulou na jedné straně) jsou všechna čísla, pro která se libovolná ze závorek v součinu rovná nule.

Pravidlo je možné použít pouze tehdy, když je jedna strana rovnice rovna nule.

Pedagogická poznámka: Připomínám studentům, že tento typ rovnic budou během svého studia potřebovat v různých situacích velmi často ve všech ročnících. Například

při počítání průběhu funkce na konci čtvrtáku patří řešení rovnic převoditelných na součinný tvar mezi největší problémy.

Př. 2: Vyřeš rovnice:

a) $(x+1)(x-3)(x+\pi)=0$

b) $x(3x+1)(x+\sqrt{2})(4x-\pi)=0$

c) $(3x+2)(x\sqrt{2}+1)(\pi^2x+\pi)=0$

d) $(x\sqrt{2}-x-1)(\pi x+\sqrt{2})(x^2+1)=0$

a) $(x+1)(x-3)(x+\pi)=0$

$(x+1)=0$

$(x-3)=0$

$(x+\pi)=0$

$x=-1$

$x=3$

$x=-\pi$

$K = \{-1; 3; -\pi\}$

b) $x(3x+1)(x+\sqrt{2})(4x-\pi)=0$

$(3x+1)=0$

$(x+\sqrt{2})=0$

$(4x-\pi)=0$

$x=0$

$x=-\frac{1}{3}$

$x=-\sqrt{2}$

$x=\frac{\pi}{4}$

$K = \left\{-\sqrt{2}; -\frac{1}{3}; 0; \frac{\pi}{4}\right\}$

c) $(3x+2)(x\sqrt{2}+1)(\pi^2x+\pi)=0$

$(3x+2)=0$

$(x\sqrt{2}+1)=0$

$(\pi^2x+\pi)=0$

$x=-\frac{2}{3}$

$x=-\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\pi^2x=-\pi$

$x=-\frac{\pi}{\pi^2} = -\frac{1}{\pi}$

$K = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{\pi}\right\}$

d) $(x\sqrt{2}-x-1)(\pi x+\sqrt{2})(x^2+1)=0$

$(x\sqrt{2}-x-1)=0$

$(\pi x+\sqrt{2})=0$

$x(\sqrt{2}-1)=1$

$x=-\frac{\sqrt{2}}{\pi}$

$(x^2+1)=0$ - nejde nikdy

$x = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}+1$

$K = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{\pi}; \sqrt{2}+1\right\}$

Pedagogická poznámka: Problémy mají někteří s body:

b) Kde zapominají na 0 (x stojící před závorkami neberou v úvahu).

d) Kde přidávají řešení kvůli členu x^2+1 , který se nule nikdy nerovná.

Př. 3: Najdi chybu v následujícím postupu:

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 4 \quad / \sqrt{\quad}$$

$$x = 2$$

Chyba: Neplatí $\sqrt{x^2} = x$. Platí $\sqrt{x^2} = |x|$. \Rightarrow Správný postup:

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 4 \quad / \sqrt{\quad}$$

$$\sqrt{x^2} = |x| = 2$$

$$K = \{-2; 2\}$$

Př. 4: Vyřeš rovnici $x^2 - 4 = 0$ bez použití odmocňování.

Použijeme součinnový tvar \Rightarrow musíme z výrazu $x^2 - 4$ vyrobit součin (proto jsme se učili rozklady na součin).

$$x^2 - 4 = 0$$

$$(x-2)(x+2) = 0$$

$$K = \{-2; 2\}$$

Př. 5: Vyřeš rovnice převedením na součinnový tvar:

a) $x^2 - 9 = 0$

b) $x^2 - x - 12 = 0$

c) $x^4 - 4 = 0$

d) $(9x^2 - 4)(1 - x^2) = 0$

e) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

a) $x^2 - 9 = 0$

$$(x-3)(x+3) = 0$$

$$K = \{-3; 3\}$$

b) $x^2 - x - 12 = 0$

$$(x-4)(x+3) = 0$$

$$K = \{-3; 4\}$$

c) $x^4 - 4 = 0$

$$(x^2 - 2)(x^2 + 2) = 0$$

$$(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 2) = 0$$

$$K = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$$

d) $(9x^2 - 4)(1 - x^2) = 0$

$$(3x - 2)(3x + 2)(1 - x)(1 + x) = 0$$

$$K = \left\{-1; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; 1\right\}$$

e) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

$$x^3 - x - 2x^2 + 2 = 0$$

$$x(x^2 - 1) - 2(x^2 - 1) = 0$$

$$(x^2 - 1)(x - 2) = 0$$

$$(x + 1)(x - 1)(x - 2) = 0$$

$$K = \{-1; 1; 2\}$$

Př. 6: Vyřeš rovnici: $x^2 - 3x = 4$.

Rovnice není v součinném tvaru \Rightarrow nejde použít dnešní postup \Rightarrow předěláme si ji tak, aby napravo vznikla nula: $x^2 - 3x - 4 = 0$.

$$(x-4)(x+1) = 0 \qquad K = \{-1, 4\}$$

Pedagogická poznámka: Při řešení příkladu se objevují dvě chyby vedoucí ke stejnému špatnému řešení. Kromě rozkladu $x(x-3) = 4$, který porušuje podmínku nulové pravé strany, někteří studenti převedou čtyřku doleva, kde už mají rozloženou původní levou stranu $x(x-3) - 4 = 0$. Vpravo je sice nula, ale součinný tvar nejde použít, protože na levé straně není součin. Myslím, že zde je dobré místo připomenout studentům, jaké výhody má, když si s pravidlem pamatují i jeho odůvodnění. Pokud totiž chápou, kde se vzala možnost využívat součinný tvar, ani jednu z předchozích chyb udělat nemohou.

Př. 7: Vyřeš rovnici: $x(x-1) = 6$.

Rovnice není v součinném tvaru (vpravo není nula, součin vlevo nestačí) \Rightarrow nejde použít dnešní postup \Rightarrow předěláme si ji tak, aby vznikla nula vpravo \Rightarrow roznásobíme závorku:

$$x^2 - x - 6 = 0.$$

Teď má smysl dělat součin: $(x-3)(x+2) = 0$.

$$K = \{-2, 3\}$$

Př. 8: Najdi chybu v následujícím postupu:

$$x^2 - 1 = x + 1$$

$$(x-1)(x+1) = x+1 \quad /:(x+1)$$

$$x-1 = 1$$

$$x = 2$$

Špatný krok: $(x-1)(x+1) = x+1 \quad /:(x+1)$. Dělíme výrazem s neznámou a neděláme podmínku \Rightarrow pokud by platilo $x+1 = 0$ dělili bychom nulou a ztratili kořen.

Správné řešení:

$$x^2 - 1 = x + 1$$

$$(x-1)(x+1) = x+1 \quad /:(x+1) \quad x \neq -1$$

$$x-1 = 1$$

$$x = 2$$

Kontrolujeme zakázané $x = -1$ dosazením do tvaru před dělením:

$$(-1)^2 - 1 = (-1) + 1$$

$0 = 0 \Rightarrow$ Pro $x = -1$ rovnice vychází $\Rightarrow x = -1$ je také kořenem.

$$K = \{-1; 2\}$$

Pokud se zdá, že můžeme rovnici výrazem vydělit, můžeme rovnici převést na součinný tvar.

Př. 9: Řeš rovnici $x^2 - 1 = x + 1$ převedením na součinný tvar.

$$x^2 - 1 = x + 1$$

$$(x-1)(x+1) - (x+1) = 0$$

$$(x+1)[(x-1)-1] = 0$$

$$(x+1)(x-2) = 0$$

$$K = \{-1; 2\}$$

Př. 10: Řeš rovnice převedením na součinný tvar:

a) $2y(y+1) = (y+1)(y+3)$

b) $x^2 - 4 = x - 2$

c) $9 - x^2 = x - 3$

d) $3x^2 - 2x = 5x^2 + 3x$

a) $2y(y+1) = (y+1)(y+3)$

$$2y(y+1) - (y+1)(y+3) = 0$$

$$(y+1)[2y - (y+3)] = 0$$

$$(y+1)(y-3) = 0$$

$$K = \{-1; 3\}$$

c) $9 - x^2 = x - 3$

$$(3-x)(3+x) - (x-3) = 0$$

$$(3-x)(3+x) + (3-x) = 0$$

$$(3-x)[(3+x)+1] = 0$$

$$(3-x)(x+4) = 0$$

$$K = \{-4; 3\}$$

b) $x^2 - 4 = x - 2$

$$(x-2)(x+2) - (x-2) = 0$$

$$(x-2)[(x+2)-1] = 0$$

$$(x-2)(x+1) = 0$$

$$K = \{-1; 2\}$$

d) $3x^2 - 2x = 5x^2 + 3x$

$$0 = 2x^2 + 5x$$

$$0 = x(2x+5)$$

$$K = \left\{-\frac{5}{2}; 0\right\}$$

Poznámka: Předchozí příklady je samozřejmě možné (zřejmě asi i výhodněji) řešit takto:

$$x^2 - 4 = x - 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x-2)(x+1) = 0$$

$$K = \{-1; 2\}$$

Př. 11: Petáková:

strana 12/cvičení 2 a) b)

Shrnutí: Pokud má rovnice na jedné straně nulu a na druhé je možné vytvořit součin, vypočteme jednotlivé kořeny snadno z jednotlivých členů součinu.