2.3.1 Rovnice v součinovém tvaru

Předpoklady: 1710, 2203

Pedagogická poznámka: Hodina obsahuje poměrně dost příkladů (20). I když je někteří stihli vypočítat, mám trochu obavu, zda postup nebyl příliš rychlý. Pokud by se mělo něco vynechávat, doporučoval bych část příkladu 5, kde jde v podstatě pouze o opakování rozkladů na součin.

Řešíme rovnici: $(x+3)(2x-1)=0$.

Obě strany rovnice jsou čísla:

- Pravá strana = nula.
- Levá strana = součin čísel (závorka znamená číslo), který má vyjít 0 (aby platila rovnice).

$\Rightarrow$ 2 možnosti:

- Ani jedno z čísel v součinu na levé straně není 0 $\Rightarrow$ součin také není 0 $\Rightarrow$ rovnice nevyjde.
- Alespoň jedno číslo v součinu je 0 $\Rightarrow$ součin je 0, bez ohledu na ostatní čísla $\Rightarrow$ rovnice vyjde.

$\Rightarrow$ Zjistíme, pro která x se jednotlivé závorky rovnají 0, a máme kořeny rovnice.

Př. 1: Vyřeš rovnici $(x+3)(2x-1)=0$.

První závorka se rovná nule:

$x+3=0$

$x=-3$

Druhá závorka se rovná nule:

$2x-1=0$

$2x=1$

$x=\frac{1}{2}$ $\qquad$ $K=\left\{-3,\frac{1}{2}\right\}$

Mohli bychom stejným způsobem řešit rovnici $(x+3)(2x-1)=1$?

Záleží na tom, jak můžeme získat 1 jako součin dvou čísel: nekonečně mnoho způsobů (například $1=1\cdot 1$, $1=2\cdot\frac{1}{2}$, $1=3\cdot\frac{1}{3}$, ...) $\Rightarrow$ nemůžeme o žádné ze závorek prohlásit, že se určitě rovná nějakému číslu $\Rightarrow$ takto rovnici bez nuly na pravé straně nespočítáme.

Řešením rovnice v součinovém tvaru (s nulou na jedné straně), jsou všechna čísla, pro která se libovolná ze závorek v součinu rovná nule.

Pravidlo je možné použít pouze tehdy, když je jedna strana rovnice rovna nule.

Pedagogická poznámka: Připomínám studentům, že tento typ rovnic budou během svého studia potřebovat v různých situacích velmi často ve všech ročnících. Například při počítání průběhu funkce na konci čtvrťáku patří řešení rovnic převoditelných na součinový tvar mezi největší problémy.

Př. 2: Vyřeš rovnice:

a) $(x+1)(x-3)(x+\pi)=0$ b) $x(3x+1)(x+\sqrt{2})(4x-\pi)=0$

c) $(3x+2)(x\sqrt{2}+1)(\pi^2x+\pi)=0$ d) $(x\sqrt{2}-x-1)(\pi x+\sqrt{2})(x^2+1)=0$

a) $(x+1)(x-3)(x+\pi)=0$

$(x+1)=0$ $\quad$ $(x-3)=0$ $\quad$ $(x+\pi)=0$

$x=-1$ $\quad$ $x=3$ $\quad$ $x=-\pi$

$K=\{-1;3;-\pi\}$

b) $x(3x+1)(x+\sqrt{2})(4x-\pi)=0$

$x=0$ $\quad$ $(3x+1)=0$ $\quad$ $(x+\sqrt{2})=0$ $\quad$ $(4x-\pi)=0$

$x=-\frac{1}{3}$ $\quad$ $x=-\sqrt{2}$ $\quad$ $x=\frac{\pi}{4}$

$K=\left\{-\sqrt{2};-\frac{1}{3};0;\frac{\pi}{4}\right\}$

c) $(3x+2)(x\sqrt{2}+1)(\pi^2x+\pi)=0$

$(3x+2)=0$ $\quad$ $(x\sqrt{2}+1)=0$ $\quad$ $(\pi^2x+\pi)=0$

$x=-\frac{2}{3}$ $\quad$ $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $\pi^2x=-\pi$

$x=-\frac{\pi}{\pi^2}=-\frac{1}{\pi}$

$K=\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{2}{3};-\frac{1}{\pi}\right\}$

d) $(x\sqrt{2}-x-1)(\pi x+\sqrt{2})(x^2+1)=0$

$(x\sqrt{2}-x-1)=0$ $\quad$ $(\pi x+\sqrt{2})=0$ $\quad$ $(x^2+1)=0$ - nejde nikdy

$x(\sqrt{2}-1)=1$ $\quad$ $x=-\frac{\sqrt{2}}{\pi}$

$x=\frac{1}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}+1$

$K=\left\{-\frac{\sqrt{2}}{\pi};\sqrt{2}+1\right\}$

Pedagogická poznámka: Problémy mají někteří s body:

b) Kde zapomínají na 0 (x stojící před závorkami neberou v úvahu).

d) Kde přidávají řešení kvůli členu x^2+1, která se nule nikdy nerovná.

Př. 3: Najdi chybu v následujícím postupu:

$$x^2-4=0$$
$$x^2=4 \quad /\sqrt{\ }$$
$$x=2$$

Chyba: Neplatí $\sqrt{x^2}=x$. Platí $\sqrt{x^2}=|x|$. $\Rightarrow$ Správný postup:

$$x^2-4=0$$
$$x^2=4 \quad /\sqrt{\ }$$
$$\sqrt{x^2}=|x|=2 \qquad K=\{-2;2\}$$

Př. 4: Vyřeš rovnici $x^2-4=0$ bez použití odmocňování.

Použijeme součinový tvar $\Rightarrow$ musíme z výrazu x^2-4 vyrobit součin (proto jsme se učili rozklady na součin).

$$x^2-4=0$$
$$(x-2)(x+2)=0 \qquad K=\{-2;2\}$$

Př. 5: Vyřeš rovnice převedením na součinový tvar:

a) $x^2-9=0$ b) $x^2-x-12=0$ c) $x^4-4=0$

d) $(9x^2-4)(1-x^2)=0$ e) $x^3-2x^2-x+2=0$

a) $x^2-9=0$

$$(x-3)(x+3)=0$$
$$K=\{-3;3\}$$

b) $x^2-x-12=0$

$$(x-4)(x+3)=0$$
$$K=\{-3;4\}$$

c) $x^4-4=0$

$$(x^2-2)(x^2+2)=0$$
$$(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+2)=0$$
$$K=\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\}$$

d) $(9x^2-4)(1-x^2)=0$

$$(3x-2)(3x+2)(1-x)(1+x)=0$$
$$K=\left\{-1;-\frac{2}{3};\frac{2}{3};1\right\}$$

e) $x^3-2x^2-x+2=0$

$$x^3-x-2x^2+2=0$$
$$x(x^2-1)-2(x^2-1)=0$$
$$(x^2-1)(x-2)=0$$
$$(x+1)(x-1)(x-2)=0$$
$$K=\{-1;1;2\}$$

Př. 6: Vyřeš rovnici: $x^2 - 3x = 4$.

Rovnice není v součinovém stavu $\Rightarrow$ nejde použít dnešní postup $\Rightarrow$ předěláme si ji tak, aby napravo vznikla nula: $x^2 - 3x - 4 = 0$.
$(x-4)(x+1) = 0$ $K = \{-1, 4\}$

Pedagogická poznámka: Pře řešení příkladu se objevují dvě chyby vedoucí ke stejnému špatnému řešení. Kromě rozkladu $x(x-3) = 4$, který porušuje podmínku nulové pravé strany, někteří studenti převedou čtyřku doleva, kde už mají rozloženou původní levou stranu $x(x-3) - 4 = 0$. Vpravo je sice nula, ale součinový tvar nejde použít, protože na levé straně není součin.
Myslím, že zde je dobré místo připomenout studentům, jaké výhody má, když si s pravidlem pamatují i jeho odůvodnění. Pokud totiž chápou, kde se vzala možnost využívat součinový tvar, ani jednu z předchozích chyb udělat nemohou.

Př. 7: Vyřeš rovnici: $x(x-1) = 6$.

Rovnice není v součinovém stavu (vpravo není nula, součin vlevo nestačí) $\Rightarrow$ nejde použít dnešní postup $\Rightarrow$ předěláme si ji tak, aby vznikla nula vpravo $\Rightarrow$ roznásobíme závorku:
$x^2 - x - 6 = 0$.
Teď má smysl dělat součin: $(x-3)(x+2) = 0$.
$K = \{-2, 3\}$

Př. 8: Najdi chybu v následujícím postupu:

$$x^2 - 1 = x + 1$$
$$(x-1)(x+1) = x + 1 \quad / : (x+1)$$
$$x - 1 = 1$$
$$x = 2$$

Špatný krok: $(x-1)(x+1) = x + 1 \quad / : (x+1)$. Dělíme výrazem s neznámou a neděláme podmínku $\Rightarrow$ pokud by platilo $x + 1 = 0$ dělili bychom nulou a ztratili kořen.
Správné řešení:

$$x^2 - 1 = x + 1$$
$$(x-1)(x+1) = x + 1 \quad / : (x+1) \qquad x \neq -1$$
$$x - 1 = 1$$
$$x = 2$$

Kontrolujeme zakázané $x = -1$ dosazením do tvaru před dělením:

$$(-1)^2 - 1 = (-1) + 1$$

$0 = 0$ $\Rightarrow$ Pro $x = -1$ rovnice vychází $\Rightarrow$ $x = -1$ je také kořenem.
$K = \{-1; 2\}$

Pokud se zdá, že můžeme rovnici výrazem vydělit, můžeme rovnici převést na součinový tvar.

Př. 9: Řeš rovnici $x^2-1=x+1$ převedením na součinový tvar.

$x^2-1=x+1$

$(x-1)(x+1)-(x+1)=0$

$(x+1)[(x-1)-1]=0$

$(x+1)(x-2)=0$ $K=\{-1;2\}$

Př. 10: Řeš rovnice převedením na součinový tvar:

a) $2y(y+1)=(y+1)(y+3)$ b) $x^2-4=x-2$

c) $9-x^2=x-3$ d) $3x^2-2x=5x^2+3x$

a) $2y(y+1)=(y+1)(y+3)$

$2y(y+1)-(y+1)(y+3)=0$

$(y+1)[2y-(y+3)]=0$

$(y+1)(y-3)=0$

$K=\{-1;3\}$

b) $x^2-4=x-2$

$(x-2)(x+2)-(x-2)=0$

$(x-2)[(x+2)-1]=0$

$(x-2)(x+1)=0$

$K=\{-1;2\}$

c) $9-x^2=x-3$

$(3-x)(3+x)-(x-3)=0$

$(3-x)(3+x)+(3-x)=0$

$(3-x)[(3+x)+1]=0$

$(3-x)(x+4)=0$

$K=\{-4;3\}$

d) $3x^2-2x=5x^2+3x$

$0=2x^2+5x$

$0=x(2x+5)$

$K=\left\{-\frac{5}{2};0\right\}$

Poznámka: Předchozí příklady je samozřejmě možné (zřejmě asi i výhodněji) řešit takto:

$x^2-4=x-2$

$x^2-x-2=0$

$(x-2)(x+1)=0$ $K=\{-1;2\}$

Př. 11: Petáková:
strana 12/cvičení 2 a) b)

Shrnutí: Pokud má rovnice na jedné straně nulu a na druhé je možné vytvořit součin, vypočteme jednotlivé kořeny snadno z jednotlivých členů součinu.