

2.3.2 Nerovnice v součinném tvaru I

Předpoklady: 2301

Řešíme nerovnici $(x+2)(2x-1) \geq 0$.

Vlevo součin dvou čísel, vpravo nula \Rightarrow jde pouze o znaménko součinu na levé straně.

Kdy je součin dvou čísel kladný?

a) Obě závorky budou kladné:

$$(x+2) \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$$

$$(2x-1) \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{Plníme obě podmínky} \Rightarrow K_1 = \left\langle \frac{1}{2}; \infty \right\rangle.$$

b) Obě závorky budou záporné:

$$(x+2) \leq 0 \Rightarrow x \leq -2$$

$$(2x-1) \leq 0 \Rightarrow x \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{Plníme obě podmínky} \Rightarrow K_2 = (-\infty; -2).$$

$$\text{Všechna řešení dohromady } K = K_1 \cup K_2 = (-\infty; -2) \cup \left\langle \frac{1}{2}; \infty \right\rangle.$$

Není to moc přehledné. Záleží pouze na znaménkách závorek a ta můžeme sledovat v tabulce:

- Řádky: jednotlivé závorky nerovnice.
- Sloupce: intervaly z \mathbb{R} rozdělené čísly, pro která jsou jednotlivé závorky rovny nule (pak máme jistotu, že žádná ze závorek uvnitř intervalu nezmění znaménko).
- Políčka uvnitř tabulky: znaménka závorek v konkrétních intervalech.

$$(x+2)(2x-1) \geq 0$$

Hledáme nulové body (vlastně řešení rovnice v součinném tvaru):

$$(x+2) = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$(2x-1) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$



Nulové body rozdělí reálná čísla na intervaly, které napíšeme do jednotlivých sloupců tabulky:

	$(-\infty; -2)$	$\left(-2; \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}; \infty\right)$
$(x+2)$	-	+	+
$(2x-1)$	-	-	+
$(x+2)(2x-1)$	+	-	+

Nulové body jsou součástí řešení, protože v nerovnosti je \geq .

Řešením jsou intervaly s červeným plus v poslední řádce (hledali jsme x , pro která je výraz vlevo větší než nula): $K = (-\infty; -2) \cup \left(\frac{1}{2}; \infty\right)$

Pedagogická poznámka: Překvapivě se ukázalo, že jeden společně spočítaný příklad stačí.

Problémy související s pochopením metody má při řešení dalších příkladů pouze menší část studentů a je možné je oddiskutovat v lavicích. Většinou se týkají toho, jak získat intervaly do tabulky.

Nejvíce chyb studenti dělají při doplňování znamének do tabulky.

Pedagogická poznámka: Hned v tomto okamžiku sdělím studentům, že náš postup je možné zrychlit a jejich úkolem je přemýšlet o tom, jak to udělat.

Př. 1: Řeš nerovnici $(2-3x)(x+1) > 0$.

Nulové body: $2-3x=0 \Rightarrow x=\frac{2}{3}$ $x+1=0 \Rightarrow x=-1$



	$(-\infty; -1)$	$\left(-1; \frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{2}{3}; \infty\right)$
$(2-3x)$	+	+	-
$(x+1)$	-	+	+
$(2-3x)(x+1)$	-	+	-

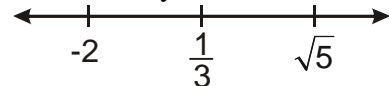
Nulové body nejsou částí řešení, protože v nerovnosti je pouze $>$.

$$K = \left(-1; \frac{2}{3}\right)$$

Př. 2: Řeš nerovnici $(x-\sqrt{5})(x+2)(1-3x) \geq 0$.

Vlevo součin tří čísel, úvaha platí (záleží jen na znaménkách) \Rightarrow stejný postup s větší tabulkou.

Nulové body:



	$(-\infty; -2)$	$\left(-2; \frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{3}; \sqrt{5}\right)$	$(\sqrt{5}; \infty)$
$(x-\sqrt{5})$	-	-	-	+
$(x+2)$	-	+	+	+
$(1-3x)$	+	+	-	-
$(x-\sqrt{5})(x+2)(1-3x)$	+	-	+	-

Nulové body jsou součástí řešení, protože v nerovnosti je \geq .

$$K = (-\infty; -2) \cup \left\langle \frac{1}{3}; \sqrt{5} \right\rangle$$

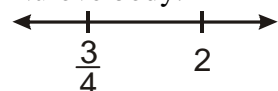
Pedagogická poznámka: Rozšíření metody na tři závorky v předchozím příkladu problémy studentům nedělá. Horší je to s následujícím příkladem. Většina studentů se snažila dvojku a odmocninu ze tří roznásobit do některé ze závorek. Také závorku $(x^2 + 1)$ většinou do tabulky zahrnuli. Doporučuji předem upozornit, že si mohou ušetřit práci, a pak ve chvíli, kdy už většina z nich na příkladu pracuje, rozebrat, co vše jde vynechat.

Př. 3: Řeš nerovnici $2(x-2)\sqrt{3}(x^2+1)(3-4x) \leq 0$

- Čísla 2 a $\sqrt{3}$ nehrají žádnou roli (jsou kladná a znaménko výsledku neovlivní).
- Závorka $(x^2 + 1)$ nehraje žádnou roli (je vždy kladná a znaménko výsledku neovlivní).

\Rightarrow Řešíme fakticky nerovnici $(x-2)(3-4x) \leq 0$.

Nulové body:



	$\left(-\infty; \frac{3}{4}\right)$	$\left(\frac{3}{4}; 2\right)$	$(2; \infty)$
$(x-2)$	-	-	+
$(3-4x)$	+	-	-
$(x-2)(3-4x)$	-	+	-

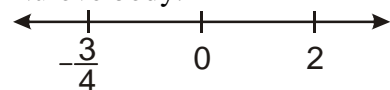
Nulové body jsou součástí řešení, protože v nerovnosti je \leq .

$$K = \left(-\infty; \frac{3}{4}\right] \cup [2; \infty)$$

Př. 4: Řeš nerovnici $x(2-x)(4x+3) < 0$.

Vlevo součin tří čísel, úvaha platí (záleží jen na znaménkách) \Rightarrow stejný postup s větší tabulkou.

Nulové body:



	$\left(-\infty; -\frac{3}{4}\right)$	$\left(-\frac{3}{4}; 0\right)$	$(0; 2)$	$(2; \infty)$
x	-	-	+	+
$(2-x)$	+	+	+	-
$(4x+3)$	-	+	+	+

$x(2-x)(4x+3)$	+	-	+	-
----------------	---	---	---	---

Nulové body nejsou součástí řešení, protože v nerovnosti není rovnítko.

$$K = \left(-\frac{3}{4}; 0\right) \cup (2; \infty)$$

Př. 5: Petáková:
strana 12/cvičení 2 c) d) e) h)

Shrnutí: Nerovnice v součinném tvaru řešíme tím, že v tabulce sledujeme znaménka jednotlivých závorek v součinu.