2.3.8 Lineární rovnice s více neznámými II

Předpoklady: 2307

Tato hodina má dva cíle:

- Procvičit si řešení rovnic se dvěma neznámými z minulé hodiny.
- Zkusit vyřešit dodržováním pravidel a pochopením základů i příklady, které jsou buď trochu „divné“ nebo vyžadují rozebrání na podpříklady.

Pedagogická poznámka: Snažím se studentům vysvětlit, že v nejlepším případě by neměli v této hodině najít nic nového nutného k zapamatování. Všechny příklady jsou vyřešit s trochou invence a dodržování pravidel.
U klíčových příkladů (1. a 4.) studentům v první fázi po chybě vždy připomínám, že se mají vrátit k základům: co znamenají rovnice, jaký je význam proměnných.
Tato hodina je jednou z nejvhodnějších k tomu, jak namotivovat studenty k tomu, aby brali na vědomí obecné a základní věci.

Př. 1: Vyřeš rovnici $2x+3y=2x+2$. Znázorni graficky množinu všech řešení.

Dvě neznámé jedna rovnice $\Rightarrow$ asi nekonečně mnoho řešení.
Upravíme:

$$2x+3y=2x+2 \quad /-2x$$
$$2x-2x+3y=2x-2x+2$$
$$3y=2$$
$$y=\frac{2}{3}$$

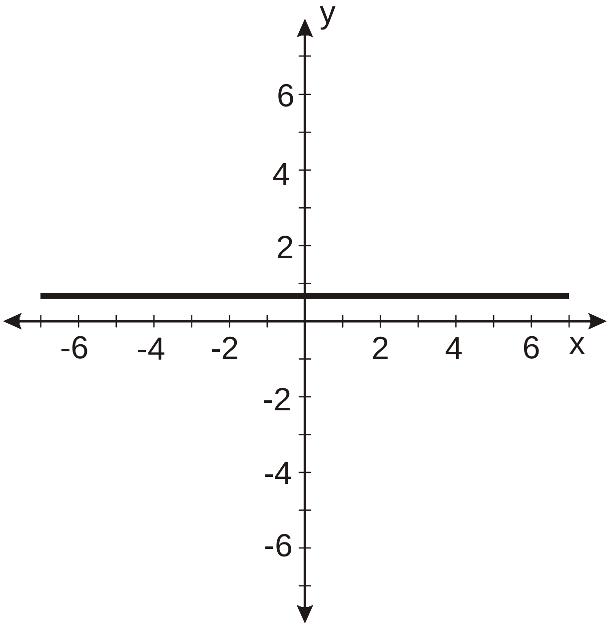
Co to znamená? Jak budeme dopočítávat nekonečně mnoho uspořádaných dvojic?
Máme (rovnici) podmínku pouze pro y $\Rightarrow$ za x můžeme dosazovat cokoliv (logické na obou stranách jsou dvojnásobky x, které se navzájem odečtou, takže na x nezáleží).

$K=\left\{\left[x,\frac{2}{3}\right];x\in R\right\}$, řešením jsou všechny uspořádané dvojice, kde x je libovolné reálné číslo a y se rovná $\frac{2}{3}$.

Uděláme zkoušku, za x zvolíme něco hodně divného: $x=\frac{\pi}{\sqrt{13}}$.

$$L=2x+3y=2\frac{\pi}{\sqrt{13}}+3\frac{2}{3}=\frac{2\pi}{\sqrt{13}}+2$$
$$P=2x+2=2\frac{\pi}{\sqrt{13}}+2=\frac{2\pi}{\sqrt{13}}+2$$
$$L=P$$

Jak znázornit množinu všech řešení graficky? Jde o předpis konstantní funkce $y=\frac{2}{3}$.



Jakou vlastnost mají body na grafu?

Hodnota x je jakákoliv, hodnota y se rovná $\frac{2}{3}$ $\Rightarrow$ opět soulad se zápisem množiny všech řešení.

Pedagogická poznámka: Nejčastější chybou bylo zapisování množiny všech řešení ve tvaru $K = \left\{\frac{3}{2}\right\}$. Jde o zjevný nesmysl, neboť řešením rovnice se dvěma neznámými musí být dvojice čísel, kterou dosazujeme za neznámé. Pokud nedokážeme získat dvojici čísel, nemáme žádné řešení.
Vkladem do budoucna by pro studenty mělo být, že ačkoliv je výsledek „cokoliv za x, za y $\frac{3}{2}$“ na první pohled divný, je možné ho různými způsoby ověřovat.

Př. 2: Vyřeš rovnici $-\frac{3}{4}x - y = \frac{3}{2} - y$. Znázorni graficky množinu všech řešení této rovnice. Jedná se o funkci?

$-\frac{3}{4}x - y = \frac{3}{2} - y \quad /\cdot 4$

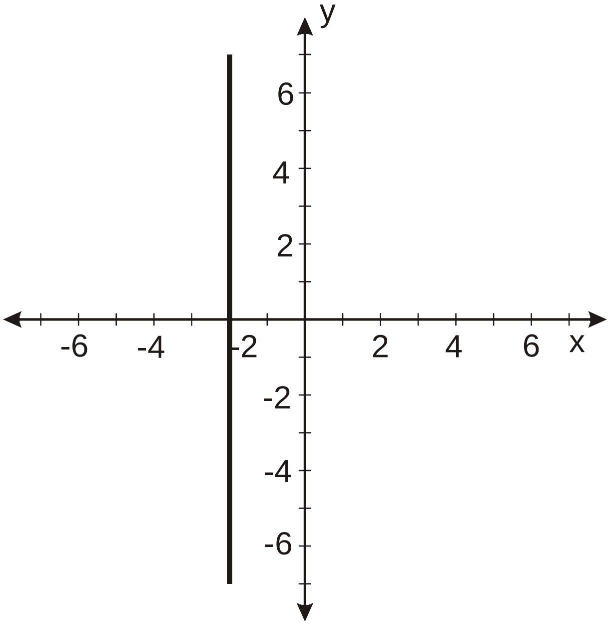
$-3x - 4y = 6 - 4y$

$-3x = 6$

$x = -2$ $\Rightarrow$ Pro y není podmínka, x se musí rovnat –2.

$K = \{[-2, y]; y \in R\}$

Grafické znázornění – všechny body, jejich x-ová souřadnice je –2, na y-ové nezáleží $\Rightarrow$ svislá přímka $\Rightarrow$ není funkce.

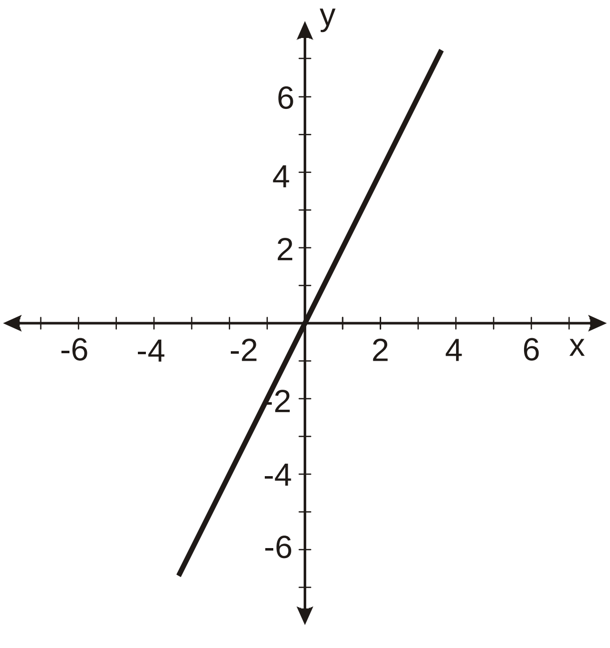


Pedagogická poznámka: Tento příklad po zkušenosti s předchozím udělají sami i Ti, kteří předchozí příklad nedokázali vypočítat ani s dopomocí a museli čekat na řešení z projektoru.

Př. 3: Najdi všechna řešení rovnice $4x - y + 10 = y + 10$. Znázorni graficky množinu všech řešení této rovnice.

$4x - y + 10 = y + 10$
$4x = 2y$
$y = 2x$ $\qquad K = \{[x, 2x] x \in R\}$

Grafickým znázorněním je funkce $y = 2x$.



Pedagogická poznámka: Na tom, že ve vyjádření není žádné samostatné číslo není nic divného, přesto to z nejasných důvodů vede některé studenty (je jich však málo) k tomu, že do výsledku uvádějí $K\left\{\left[\frac{1}{2}y;2x\right]x\in R, y\in R\right\}$. Svůj nápad však nedokáží vysvětlit. Snažím se je přesvědčit (i s ohledem na následující příklad), že nemají úplnou volnost volby (jak by jejich řešení nasvědčovalo), ale mohou volit pouze jedno z čísel, druhé musí dopočítat.

Př. 4: Vyřeš rovnici: $2x-3y+z-5=0$.

Tři proměnné $\Rightarrow$ hledáme uspořádané trojice.
Tři proměnné $\Rightarrow$ tři možnosti volby.
Jedna rovnice $\Rightarrow$ jediná podmínka $\Rightarrow$ dvě neznámé můžeme volit a třetí dopočítáme.

Dvě proměnné, které budeme volit si můžeme vybrat libovolně (vybereme je tak abychom ve vyjádření neměli zlomek).

$$2x-3y+z-5=0$$
$$z=5+3y-2x$$
$$K=\left\{\left[x;y;5+3y-2x\right];x\in R;y\in R\right\}$$

Pedagogická poznámka: S předcházejícím příkladem mají studenti překvapivě velké problémy. Je zřejmé, že přes mou snahu nevnímají rovnice jako podmínky omezující volnost volby čísel, která dosazujeme do proměnných. Kvůli řešení soustav přesto považuji tuto představu za velmi přínosnou.

Př. 5: Vyřeš rovnici: $x-2y+3z+3=2x+3y+3z$.

$$x-2y+3z+3=2x+3y+3z$$
$$-x-5y+3=0$$

Opět tři neznámé, jen jedna rovnice $\Rightarrow$ dvě neznámé bychom měl volit, jednou z nich je *z*, které se při úpravách odečetlo.

$$x=3-5y$$
$$K=\left\{\left[3-5y;y;z\right];y\in R;z\in R\right\}$$

Př. 6: Vyřeš rovnici: $\frac{x+1}{y-3}=2$.

Podmínka: $y\neq 3$.

$$\frac{x+1}{y-3}=2 \quad /\cdot(y-3)$$
$$x+1=2(y-3)$$
$$x+1=2y-6$$
$$x+7=2y$$
$$y=\frac{x+7}{2} \qquad K=\left\{\left[x,\frac{x+7}{2}\right];x\in R\right\}$$

$\Rightarrow$ Není dobře, nezohlednili jsme podmínku.

$y \neq 3 \Rightarrow \frac{x+7}{2} \neq 3$

$\frac{x+7}{2} \neq 3 \quad /\cdot 2$

$x \neq -1$

$K = \left\{\left[x, \frac{x+7}{2}\right]; x \in R - \{-1\}\right\}$ $\Rightarrow$ Za *x* můžeme dosadit všechno, kromě –1 (aby za *y* nevyšlo 3).

Rychleji bychom se dostali k výsledku, kdybychom vyjadřovali pomocí *y*.
Podmínka: $y \neq 3$.

$\frac{x+1}{y-3} = 2 \quad /\cdot(y-3)$

$x+1 = 2(y-3)$

$x+1 = 2y-6$

$x = 2y-7$

$K = \{[2y-7, y]; y \in R - \{3\}\}$ $\Rightarrow$ Hned víme, co vyloučit (za vyloučené *x* by opět vyšlo $2\cdot 3-7=-1$).

Pedagogická poznámka: Část studentů samozřejmě zapomněla na podmínku hned na začátku, část ji nebrala v úvahu, když psala výsledek, ale pokud jsem jim tyhle dvě věci připomněl, dali řešení většinou v pohodě dohromady. Největší problém jim dělal zápis faktu, že si mohou vybrat všechna reálná čísla kromě jednoho. Část z nich to řešila sjednocením intervalů $(-\infty;-1)\cup(-1;\infty)$.

Př. 7: Najdi všechna řešení rovnice $4x+5y=60$ v množině *Z*.

Nejdřív najdeme řešení v množině *R*. Protože $Z \subset R$, určitě bude tato množina obsahovat i všechna řešení v *Z*.

$4x+5y=60$

$4x = 60-5y$

$x = \frac{60-5y}{4}$

$x = 15 - \frac{5}{4}y$

$K = \left\{\left[15-\frac{5}{4}y, y\right]; y \in R\right\}$ $\Rightarrow$ řešení v *R*

Začneme vybírat *y* jen z celých čísel (dvojice $[\textit{něco}; 0,23]$ je jasně špatně, *y* není celé)

$K = \left\{\left[15-\frac{5}{4}y, y\right]; y \in Z\right\}$

- Někdy to vyjde: $y=4 \Rightarrow x = 15-\frac{5}{4}y = 15-\frac{5}{4}4 = 10 \Rightarrow$ dvojice $[10;4]$ se skládá z celých čísel.

- Jindy to nevyjde: $y = 1 \Rightarrow x = 15 - \frac{5}{4}y = 15 - \frac{5}{4}1 = \frac{55}{4} \Rightarrow$ dvojice $\left[\frac{55}{4};1\right]$ není z celých čísel.

Kazí to zlomek ve vyjádření *x*, musíme dosazovat za *y* násobky 4: $y = 4t$.

$K = \left\{\left[15 - \frac{5}{4}4t, 4t\right]; t \in Z\right\}$

$K = \left\{[15 - 5t, 4t]; t \in Z\right\}$

Shrnutí: V těžkých okamžicích při řešení rovnic s větším počtem proměnných pomáhá, když si uvědomíme, že rovnice jsou podmínky, které omezují možnosti volby čísel, které dosazujeme za proměnné.