

2.3.10 Soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých I

Předpoklady: 2308

Pedagogická poznámka: Hodina má trochu netradiční charakter. U každé metody si studenti opíší postup a pak ho zkusí uplatnit na stále stejnou soustavu rovnic. Hlavním cílem je právě to, aby zkusili sami z popisu algoritmu soustavu jednotlivými způsoby vyřešit. Některé z postupů znají, nejvíce problémů bývá se srovnávací metodou.

Př. 1: Urči věk otce a věk syna, víš-li, že za 3 roky bude otec 5krát starší než syn a za 5 let bude otec 4krát starší než syn.

Sestavíme rovnice:

Dvě neznámé:

věk otce... x	věk otce za 3 roky... $x+3$	věk otce za 5 let... $x+5$
věk syna... y	věk syna za 3 roky... $y+3$	věk syna za 5 let... $y+5$

Za 3 roky bude otec 5krát starší než syn. $\Rightarrow (x+3) = 5(y+3)$

Za 5 let bude otec 4krát starší než syn. $\Rightarrow (x+5) = 4(y+5)$

Pedagogická poznámka: Při sestavování rovnic je opět největším problémem ukvapený postup ústící do rovnic typu $x+3 = 5y+3 \dots$

Upravíme rovnice:

$$(x+3) = 5(y+3) \qquad (x+5) = 4(y+5)$$

$$x+3 = 5y+15 \qquad x+5 = 4y+20$$

$$x-5y = 12 \qquad x-4y = 15$$

Získali jsme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$$\begin{aligned} x-5y &= 12 \\ x-4y &= 15 \end{aligned} \Rightarrow \text{dvě možnosti volby a dvě omezující podmínky.}$$

Soustavou dvou lineárních rovnic o dvou neznámých rozumíme soustavu rovnic, kterou lze zapsat ve tvaru:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}, \text{ kde } x \text{ a } y \text{ jsou proměnné a } a_1; a_2; b_1; b_2; c_1; c_2 \text{ koeficienty z } R.$$

Řešení soustavy rovnic můžeme pojmut jako řešení příkladu, ve kterém máme dvě možnosti volby (neznámé x a y) a dvě podmínky omezující tuto volbu (rovnice $a_1x + b_1y = c_1$ a $a_2x + b_2y = c_2$).

Poznámka: Hlavně na vysokoškolské úrovni se používá častěji zápis:
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}.$$

Pedagogická poznámka: Při kontrole je třeba ukázat zápis výsledku ve formě $K = [27; 3]$.

Pedagogická poznámka: O řešení soustavy pomocí uvedených metod se žáci po zkráceném opsání algoritmu snaží sami. Předem je upozorním, aby si u každé metody vynechali několik řádek na poznámky, které si řekneme při společné kontrole. Rychlejší žáci mohou řešit příklad 5 a přemýšlet o výhodách a nevýhodách jednotlivých metod.

Existuje několik metod řešení naší soustavy.

Dosazovací metoda

1. Jednu z neznámých vyjádříme pomocí jedné z rovnic jako výraz.
2. Výraz dosadíme za neznámou do druhé rovnice \Rightarrow získáme rovnici s jedinou neznámou.
3. Spočítáme rovnici a tím určíme hodnotu druhé neznámé.
4. Pomocí spočtené proměnné určíme hodnotu zbývajících proměnné.

Př. 2: Vyřeš soustavu rovnic
$$\begin{aligned}x - 5y &= 12 \\ x - 4y &= 15\end{aligned}$$
 dosazovací metodou.

$$x - 5y = 12 \Rightarrow x = 12 + 5y \quad (\text{jednu z neznámých vyjádříme pomocí jedné z rovnic jako výraz})$$

$$x - 4y = 15 \Rightarrow (12 + 5y) - 4y = 15 \quad (\text{výraz dosadíme za neznámou do druhé rovnice})$$

$$(12 + 5y) - 4y = 15 \quad (\text{spočteme rovnici})$$

$$12 + 5y - 4y = 15$$

$$y = 3$$

Hodnotu zbývajících proměnné dopočteme z vyjádřeného výrazu.

$$x = 12 + 5y = 12 + 5 \cdot 3 = 27 \quad K = [27; 3]$$

Otci je 27 let, synovi jsou tři roky.

Dodatek: První rovnici jsme vyjádřením neznámé nezapomněli, jen jsme ji trochu přeměnili a jakmile jsme chtěli dopočítat x , opět jsme ji použili.

Výsledek nezávisí na tom, kterou neznámou a ze které rovnice jsme vyjadřovali. Na této volbě může záviset délka a obtížnost výpočtu.

Vyřešíme soustavu vyjádřením y z druhé rovnice:

$$x - 4y = 15 \Rightarrow 4y = x - 15 \Rightarrow y = \frac{x - 15}{4} \quad (\text{jednu z neznámých vyjádříme pomocí jedné}$$

z rovnic jako výraz)

$$x - 5y = 12 \Rightarrow x - 5 \frac{x - 15}{4} = 12 \quad (\text{výraz dosadíme za neznámou do druhé rovnice})$$

$$x - 5 \frac{x - 15}{4} = 12 \quad / \cdot 4 \quad (\text{spočteme rovnici})$$

$$4x - 5x + 75 = 48$$

$$x = 27$$

Hodnotu zbývajících proměnné dopočteme z vyjádřeného výrazu.

$$y = \frac{x - 15}{4} = \frac{27 - 15}{4} = 3 \quad K = [27; 3]$$

\Rightarrow Pokud se rozhodneme pro dosazovací metodu, je dobré si rozmyslet, jakou neznámou a z jaké rovnice budeme vyjadřovat.

Pedagogická poznámka: Při dalších příkladech na dosazovací metodu vždycky diskutujeme o výhodnosti jednotlivých postupů.

Poznámka: Dosazovací metodu už jsme fakticky používali při řešení slovních úloh, kdy jsme si na začátku zvolili více neznámých a pak jsme jejich počet postupných dosazováním a vyjadřováním snižovali.

Srovnávací metoda

1. Z obou rovnic vyjádříme jednu z neznámých.
2. Ze vzniklých výrazů sestavíme novou rovnici (oba se rovnají stejnému číslu – neznámé).
3. Spočítáme rovnici.
4. Pomocí spočtené neznámé určíme hodnotu druhé neznámé.

Př. 3: Vyřeš soustavu rovnic
$$\begin{aligned}x - 5y &= 12 \\ x - 4y &= 15\end{aligned}$$
 srovnávací metodou.

$$x - 5y = 12$$

$$x - 4y = 15$$

$$x - 5y = 12 \Rightarrow x = 12 + 5y$$

$$x - 4y = 15 \Rightarrow x = 15 + 4y$$

$$12 + 5y = 15 + 4y$$

$$y = 3$$

x spočteme dosazením do jedné z rovnic.

$$x = 12 + 5y = 12 + 5 \cdot 3 = 27 \quad K = [27; 3]$$

V obou rovnicích se vyskytuje samotné x , necháme ho na jedné straně, zbytek rovnic převedeme na druhou stranu.

Na levé straně obou rovnic je stejné číslo, z toho vyplývá, že i na pravé straně musí být stejné číslo (obě strany každé rovnice musí být stejné číslo) \Rightarrow pravé strany se také rovnají.

Dodatek: Výraz shodný v obou rovnicích nemusí být nutně jedna z neznámých, může být i značně složitější. Aby bylo možné soustavu srovnávací metodou vyřešit, musí oba rozdílné výrazy na pravé straně obsahovat, pouze jednu stejnou proměnou. Jinak bychom jejich porovnáním získali rovnici o dvou neznámých (která má obecně nekonečně mnoho řešení).

Poznámka: Srovnávací metoda je hodně efektivní v některých situacích, ale není použitelná vždy.

Sčítací metoda

1. Rovnice vhodně vynásobíme.
2. Vynásobené rovnice sečteme (vynásobení musí být takové, aby se při sčítání jedna z proměnných odečetla).
3. Spočítáme získanou rovnici s jedinou neznámou.
4. Pomocí spočtené neznámé určíme hodnotu druhé dosazením do jedné z původních rovnic.

Př. 4: Vyřeš soustavu rovnic $\begin{matrix} x - 5y = 12 \\ x - 4y = 15 \end{matrix}$ sčítací metodou.

$$\begin{array}{r} x - 5y = 12 \\ x - 4y = 15 \quad / \cdot (-1) \\ \hline x - 5y = 12 \\ -x + 4y = -15 \end{array}$$

Teď rovnice sečteme: K pravé straně první rovnice přičteme pravou stranu druhé (číslo -15), k levé straně první rovnice přičteme levou stranu druhé (výraz $(-x + 4y)$).

Protože druhá rovnice je rovnicí, je hodnota obou jejích stran stejná \Rightarrow k levé straně první rovnice tak připočítáváme také číslo -15 , ale napsané složitěji.

$$x + (-x) - 5y + 4y = 12 + (-15)$$

$$0 \cdot x - y = -3$$

$$y = 3$$

Dosadíme do jedné z rovnic (například té první).

$$x - 5y = 12 \Rightarrow x - 5 \cdot 3 = 12 \Rightarrow x = 27 \qquad K = [27; 3]$$

Dodatek: Sčítací metoda není nic jiného než uplatnění ekvivalentní úpravy rovnice – přičtením stejného čísla k oběma stranám rovnice se její řešení nezmění. Číslo, které přičítáme, je však pokaždé jinak zapsané.

Poznámka: Sčítací metoda je při řešení soustav rovnic s více než dvěma rovnicemi zdaleka nejpoužívanější.

Na první pohled se zdá, že sečtením jsme ze dvou rovnic udělali jednu. **Není to pravda!** Sečtením jsme získali jednu rovnici, ale abychom určili i hodnotu druhé proměnné, museli jsme jako druhou použít jednu ze dvou původních rovnic. Správně jsme tedy měli stále sadu dvou rovnic, v níž jsme jednu z původních nahradili součtem obou rovnic. Správný striktní zápis totální sčítací metody by vypadal takto:

$$x - 5y = 12$$

$$x - 4y = 15$$

$$\hline x - 5y = 12$$

$$x - x - 4y - (-5y) = 15 - 12 \quad (\text{místo druhé rovnice píšeme rozdíl druhé rovnice a první rovnice})$$

$$\hline x - 5y = 12$$

$$\quad y = 3$$

$$\hline x - 5y + 5y = 12 + 5 \cdot 3$$

$$\quad y = 3 \qquad (\text{k první rovnici přičítáme pětinašobek druhé})$$

$$\hline x = 27$$

$$\hline y = 3$$

Zápis je zdlouhavý, ale je z něj vidět, že jsme měli dvě podmínky pro neznámé a tyto podmínky jsme postupně zprůhledňovali tak, aby bylo co nejlépe vidět, jaké hodnoty neznámých připouštějí.

Při první úpravě jsme rovnice odečítali, mělo by se tedy jednat o odčítací metodu. Tento název se ale nepoužívá, odečítání bereme jako přičítání opačného čísla (viz. původní postup).

Pedagogická poznámka: Diskuse o zachování počtu rovnic je důležitá. Právě ztrácení rovnic a celkově malý přehled o tom, kolik rovnic soustava vlastně obsahuje, je zdrojem řady problémů u složitějších příkladů.

Existují i další metody.

Př. 5: Vyřeš libovolnou metodou soustavu rovnic
$$\begin{cases} xy - x = 2 \\ xy^2 - x = 6 \end{cases}$$

Upravíme soustavu:

$$x(y-1) = 2$$

$$x(y^2-1) = 6$$

$$\underline{x(y-1) = 2}$$

$$x(y-1)(y+1) = 6 \quad /:(y+1), \quad y \neq -1$$

$$\underline{x(y-1) = 2}$$

$$x(y-1) = \frac{6}{y+1}$$

Použijeme srovnávací metodu:

$$2 = \frac{6}{y+1} \quad /:(y+1)$$

$$2(y+1) = 6$$

$$2y + 2 = 6$$

$$2y = 4$$

$$y = 2$$

Dosazením do první rovnice určíme x :

$$x(2-1) = 2$$

$$x = 2$$

$$K = [2; 2]$$

Dodatek: Soustavu je možné řešit i dosazovací metodou, naopak sčítací metoda by šla uplatnit jen těžko.

Soustavu je možné vyřešit efektivněji pomocí nové metody.

Metoda dělicí

$$xy - x = 2$$

$$xy^2 - x = 6$$

$$\underline{x(y-1) = 2}$$

$$x(y^2-1) = 6$$

$$\underline{x(y-1) = 2}$$

$$\underline{\underline{\frac{x(y^2-1)}{x(y-1)} = \frac{6}{2}}}$$

Druhou rovnici jsme vydělili první rovnicí. Dělili jsme obě rovnice číslem 2, jednou ale bylo napsáno jako $x(y-1)$. Podmínky jsou zbytečné. Víme, že nedělíme nulou (dělíme číslem 2).

$$\begin{array}{l}
 x(y-1) = 2 \\
 \frac{x(y-1)(y+1)}{x(y-1)} = \frac{6}{2} \\
 \hline
 x(y-1) = 2 \\
 y+1 = 3 \\
 \hline
 x(y-1) = 2 \\
 y = 2 \\
 \hline
 x(2-1) = 2 \\
 y = 2 \\
 \hline
 x = 2 \\
 y = 2 \\
 \hline
 K = [2; 2]
 \end{array}$$

(teď dosadíme hodnotu y do první rovnice)

Podobně jako dělicí metodu můžeme odvodit i další metody, které vycházejí z ekvivalentních úprav a jejich hlavní myšlenky – pokud provedeme s oběma stranami rovnice takovou úpravu, která změní obě hodnoty stejně, řešení se nezmění.

Shrnutí: Pro řešení soustav dvou rovnic můžeme používat různé metody, které však vždy vycházejí z principu ekvivalentní úpravy rovnice.