2.3.13 Soustavy více rovnic o více neznámých I

Předpoklady: 2312

Př. 1: Co při řešení soustav rovnic o více neznámých představují rovnice? Co představují neznámé? Čím je určen počet řešení? Kdy je řešení právě jedno? Kdy řešení neexistuje? Kdy je jich nekonečně mnoho?

Neznámé představují možnosti volby.
Rovnice představují podmínky, kterými se neznámé musí řídit a tím omezují možnosti volby.
Počet řešení je určen počtem voleb (neznámých) a počtem podmínek (rovnic).
Mohou nastat následující možnosti:

- soustava obsahuje dvě rovnice představující podmínky, které se navzájem vylučují ($x+2y=1,\ x+2y=-2$) $\Rightarrow$ soustav nemá řešení,
- podmínky (rovnice) se nevylučují a jejich počet se rovná počtu voleb (neznámých) $\Rightarrow$ právě jedno řešení,
- podmínky (rovnice) se nevylučují a jejich počet je menší než počet voleb (neznámých) $\Rightarrow$ nekonečně mnoho řešení (počet neznámých, za které volíme se rovná rozdílu z počtu neznámých počtu rovnic).

Při řešení soustavy rovnic musíme překonat dvě překážky:

- pomocí úprav zpřehlednit rovnice,
- ze zpřehledněné soustavy rovnice zjistit řešení.

V této hodině se zpřehledňování vyhneme a budeme řešit soustavy, které jsou již upravené do nejjasnějšího tvaru.

Př. 2: Vyřeš soustavu rovnic $\begin{aligned} 3x-y+z&=-2\\ 2y+z&=1\\ 3z&=9 \end{aligned}$. Po vyřešení příkladu zhodnoť jeho obtížnost a co na ní mělo největší vliv.

Vyjádříme *z* ze třetí rovnice: $3z=9$
$z=3$
Hodnotu *z* dosadíme do druhé rovnice a vyjádříme *y*: $2y+z=1 \Rightarrow 2y+3=1$
$2y=-2$
$y=-1$
Hodnoty *z* a *y* dosadíme do první rovnice a vyjádříme *x*:
$3x-y+z=-2 \Rightarrow 3x-(-1)+3=-2$
$3x=-6$
$x=-2$ $\qquad K=\{[-2;-1;3]\}$

Podobné soustavy by měly být v písemce. Výpočet byl jednoduchý, protože z poslední rovnice jsme mohli ihned určit *z* a všechny další rovnice se daly vypočítat dosazením hodnot neznámých určených z rovnic pod nimi.

Levé strany soustavy mají tvar trojúhelníka (odshora ubývá neznámých, které v rovnicích účinkují) $\Rightarrow$ říkáme, že soustava je upravena do **(horního) trojúhelníkového tvaru**.
Z trojúhelníkového tvaru je zřejmé, že soustava obsahuje tři neznámé a tři podmínky. Žádná rovnice nemá levou stranu nulovou a když jdeme odzadu, každá obsahuje na levé straně o jednu neznámou víc než rovnice předchozí. Tím je zajištěno, že každá přináší do soustavy novou informaci a nejde nahradit žádnou kombinací předchozích rovnic.

Dodatek: Soustavu by bylo možné řešit i striktně sčítací metodou (je to ale zbytečné a jde o jasný projev masochismu).

$$\begin{aligned} 3x - y + z &= -2 \\ 2y + z &= 1 \\ 3z &= 9 \quad /:3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x - y + z &= -2 \\ 2y + z &= 1 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 3x - y + z = -2 \\ [\![2]\!]-[\![3]\!] \qquad & 2y \qquad = -2 \quad /:2 \\ & z = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x - y + z &= -2 \\ y \qquad &= -1 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\![1]\!]+[\![2]\!]-[\![3]\!] \qquad & 3x \qquad = -6 \quad /:3 \\ & y \qquad = -1 \\ & z = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \qquad &= -2 \\ y \qquad &= -1 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

$K = \{[-2;-1;3]\}$

Pedagogická poznámka: Předchozí dodatek studentům pouze ukazuji a nechci, aby si ji přepisovali do sešitů.

Pedagogická poznámka: Překvapilo mě, že značná část studentů buď nevěděla, jak příklad řešit, nebo začala upravovat rovnice sčítací metodou stylem, který je jako zcela nevhodný uveden v dodatku. Jde o jasnou ukázku studentské tendence bezmyšlenkovitě opakovat naposledy probíraný postup. Na tomto příkladu teď ukazuji, že je lepší se nejdříve trochu zamyslet.

Př. 3: Vyřeš soustavu rovnic $\begin{aligned} 3x + 2y - z &= 5 \\ y + 2z &= 0 \\ 3z &= -3 \end{aligned}$.

Stejná situace jako v předchozím příkladu.

Vyjádříme *z* ze třetí rovnice: $3z=-3 \Rightarrow z=-1$.
Hodnotu *z* dosadíme do druhé rovnice a vyjádříme *y*: $y+2z=0 \Rightarrow y+2\cdot(-1)=0$

$y=2$

Hodnoty *z* a *y* dosadíme do první rovnice a vyjádříme *x*:

$3x+2y-z=3x+2\cdot 2-(-1)=5$

$3x+5=5$

$3x=0$

$x=0$ $\qquad\qquad K=\{[\ 0;2;-1]\}$

Pedagogická poznámka: Asi se objeví někdo, kdo z rovnice $3x=0$ usoudí, že soustava nemá řešení.

Př. 4: Vyřeš soustavu rovnic $\begin{aligned} x-2y+z&=4 \\ y+z&=2 \end{aligned}$.

Soustava má tři neznámé (tři možnosti volby) a dvě rovnice (dvě omezující podmínky) $\Rightarrow$ zbývá nám jedna možnost volby $\Rightarrow$ jednu neznámou musíme volit a zbývající dvě vyjádříme pomocí této neznámé. Při vyjadřování začneme opět u nejjednodušší rovnice a postupujeme ke složitějším.
Vyjádříme *y* ze druhé rovnice pomocí *z*: $y+z=2$.

$y=2-z$

Dosadíme za *y* do první rovnice a vyjádříme *x*:

$x-2y+z=x-2(2-z)+z=4$ - za *z* nedosazujeme, protože je tou neznámou, kterou volíme

$x-4+2z+z=4$

$x=8-3z$ $\qquad\qquad K=\{[8-3z;2-z;z],z\in R\}$

Existenci nekonečně mnoha řešení předchozího příkladu můžeme zdůvodnit i jinak. Soustavě $\begin{aligned} x-2y+z&=4 \\ y+z&=2 \end{aligned}$ chybí k předchozím (jednoznačným) soustavám $\begin{aligned} 3x+2y-z&=5 \\ y+2z&=0 \\ 3z&=-3 \end{aligned}$ a $\begin{aligned} 3x-y+z&=-2 \\ 2y+z&=1 \\ 3z&=9 \end{aligned}$ poslední třetí rovnice, která v předchozích soustavách určovala hodnotu *z* $\Rightarrow$ hodnota *z* je tedy neurčena, mohu si ji volit a ostatní proměnné dopočítávat podle zvolené hodnoty.

Pedagogická poznámka: Příklad končí úplnou blamáží. Skoro nikdo nebývá schopen s ním hnout. Teprve když jsme ho porovnáváme s předchozím a studenti si uvědomí, že v něm chybí třetí rovnice, která určila hodnotu *z*, přistoupí ve větším počtu na správné řešení.

Pedagogická poznámka: Vážné problémy s předchozím příkladem podle mého názoru nasvědčují systémové chybě v jejich způsobu vnímání výuky. Šest předchozích hodin je věnováno různým situacím typu rovnice+proměnné, které by měly vést k tomu, aby si žák utvořil nějakou představu o tom, jak věci fungují. Pokud ji stále nemá, znamená to, že se zřejmě příliš soustředí na konkrétní příklady a nedokáže myslet na skutečnosti „za nimi“.

Jak už víme od rovnic se dvěma neznámými, způsobů, jak nekonečné množství řešení vyjádřit, je více.
V předchozí soustavě jsme mohli vyjadřovat i pomocí y. Vyjádříme z ze druhé rovnice pomocí y: $y+z=2 \Rightarrow z=2-y$.
Dosadíme za z do první rovnice a vyjádříme x:
$x-2y+z=x-2y+(2-y)=4$ - za y nedosazujeme, protože je tou neznámou, kterou volíme
$x-3y+2=4$
$x=2+3y$ $\qquad K=\{[2+3y;y;2-y], y\in R\}$

Př. 5: Zvol libovolné číslo za z (y), dopočti zbývající dvojici neznámých a dosazením do soustavy ověř, že řešení je správné.

Volíme za neznámou z

volba za neznámou	dopočtení zbývajících proměnných	řešení soustavy	zkouška
$z=1$	$x=8-3z=8-3\cdot 1=5$ $y=2-z=2-1=1$	$[5;1;1]$	$x-2y+z=5-2\cdot 1+1=4$ $y+z=1+1=2$
$z=0$	$x=8-3z=8-3\cdot 0=8$ $y=2-z=2-0=2$	$[8;2;0]$	$x-2y+z=8-2\cdot 2+0=4$ $y+z=2+0=2$
$z=2$	$x=8-3z=8-3\cdot 2=2$ $y=2-z=2-2=0$	$[2;0;2]$	$x-2y+z=2-2\cdot 0+2=4$ $y+z=0+2=2$
$z=-1$	$x=8-3z=8-3\cdot(-1)=11$ $y=2-z=2-(-1)=3$	$[11;3;-1]$	$x-2y+z=11-2\cdot 3+(-1)=4$ $y+z=3+(-1)=2$
$z=27$	$x=8-3z=8-3\cdot 27=-73$ $y=2-z=2-27=-25$	$[-73;-25;27]$	$x-2y+z=-73-2\cdot(-25)+27=4$ $y+z=-25+27=2$

Volíme za neznámou y

volba za neznámou	dopočtení zbývajících proměnných	řešení soustavy	zkouška
$y=1$	$x=2+3y=2+3\cdot 1=5$ $z=2-y=2-1=1$	$[5;1;1]$	$x-2y+z=5-2\cdot 1+1=4$ $y+z=1+1=2$
$y=0$	$x=2+3y=2+3\cdot 0=2$ $z=2-y=2-0=2$	$[2;0;2]$	$x-2y+z=2-2\cdot 0+2=4$ $y+z=0+2=2$
$y=2$	$x=2+3y=2+3\cdot 2=8$ $z=2-y=2-2=0$	$[8;2;0]$	$x-2y+z=8-2\cdot 2+0=4$ $y+z=2+0=2$
$y=-1$	$x=2+3y=2+3\cdot(-1)=-1$ $z=2-y=2-(-1)=3$	$[-1;-1;3]$	$x-2y+z=-1-2\cdot(-1)+3=4$ $y+z=-1+3=2$
$y=27$	$x=2+3y=2+3\cdot 27=83$ $z=2-y=2-27=-25$	$[83;27;-25]$	$x-2y+z=83-2\cdot 27+(-25)=4$ $y+z=27+(-25)=2$

Pedagogická poznámka: V hodině si každý student zvolí číslo (hodnotu *z* nebo *y*) dopočítá hodnoty ostatních proměnných a dosadí je do soustavy. Různí studenti si volí různá čísla, fakt, že všechno vyjde, na studenty docela působí. U slabších je možná bezpečnější dát čísla z učebnice, aby se jejich výsledky daly rychle zkontrolovat.

Př. 6: Vyřeš soustavu rovnic $3x+2y+4z=6$.

Soustava má tři neznámé a jednu rovnici. Zbývají nám dvě možnosti volby $\Rightarrow$ dvě neznámé můžeme zvolit a zbývající vyjádříme pomocí těchto neznámých.
Zvolím *y* a *z* (nezáleží na tom, které neznámé si vyberu).
$3x+2y+4z=6 \Rightarrow 3x=6-2y-4z$

$$x=\frac{6-4z-2y}{3} \qquad K=\left\{\left[\frac{6-4z-2y}{3};y;z\right] y\in R, z\in R\right\}$$

Pedagogická poznámka: Po vyřešení příkladu 4 je tento pro studenty docela lehký.

Pedagogická poznámka: Až trochu úsměvně vypadá zkušenost, že někteří žáci při čtení zadání příkladů 6 a 7 přidají první rovnici sedmého příkladu k rovnici v šestém příkladu, aby tak získali zadání více podobné předchozímu příkladu 4.

Př. 7: Vyřeš soustavu rovnic
$$\begin{aligned} x-2y+3z&=5 \\ y-z&=3 \\ y-z&=1 \end{aligned}$$.

Soustava nemá řešení. Druhá a třetí rovnice se navzájem vylučují (stejné levé strany, různé pravé strany). O správnosti této úvahy se můžeme přesvědčit i odečtením obou rovnic.

$$\begin{aligned} & x-2y+3z=5 \\ & y-z=3 \;\Rightarrow\; K=\emptyset \\ [\![2]\!]-[\![3]\!] \quad & 0y-0z=2 \end{aligned}$$

Př. 8: Vyřeš soustavu rovnic
$$\begin{aligned} 2x-2y+z&=3 \\ y-3z&=4 \\ y-3z&=4 \end{aligned}$$.

Druhá a třetí rovnice jsou stejné $\Rightarrow$ ve skutečnosti máme pouze dvě rovnice:

$$\begin{aligned} 2x-2y+z&=3 \\ y-3z&=4 \end{aligned}$$

Soustava má tři neznámé (tři možnosti volby) a dvě rovnice (dvě omezující podmínky) $\Rightarrow$ zbývá nám jedna možnost volby $\Rightarrow$ jednu neznámou můžeme volit a zbývající dvě vyjádříme pomocí této neznámé. Při vyjadřování začneme opět u nejjednodušší rovnice a postupujeme ke složitějším.
Vyjádříme *y* ze druhé rovnice pomocí *z*:
$y-3z=4$

$y = 4 + 3z$

Dosadíme za *y* do první rovnice a vyjádříme *x*:

$2x - 2y + z = 3 \Rightarrow 2x - 2(4 + 3z) + z = 3$ - za *z* nedosazujeme, protože je to neznámou, kterou volíme

$2x - 8 - 5z = 3$

$2x = 5z + 11$

$x = \frac{5z + 11}{2}$ $\quad\quad K = \left\{ \left[\frac{5z+11}{2}; 4 + 3z; z \right], z \in R \right\}$

Poznámka: Vynechání třetí rovnice můžeme brát i jako důsledek odečtení druhé a třetí rovnice v původní soustavě

$$\begin{array}{rl} & 2x - 2y + z = 3 \\ & y - 3z = 4 \\ [\![2]\!] - [\![3]\!] & 0y - 0z = 0 \end{array}$$

Rovnice $0x - 0y = 0$ je totiž splněna vždy a není nutné ji vůbec psát.

Pedagogická poznámka: Někteří žáci přijdou na to, že soustava má nekonečně mnoho řešení, ale zřejmě pod inspirací příkladem 6 začnou nesystematicky vyjadřovat jednu neznámou z druhé. Dojdou tak k následujícímu špatnému „řešení“: $K = \left\{ \left[x; \frac{2x + z - 3}{2}; 3 + 2y - 2x \right], x \in R \right\}$. Není od věci (i když se ve třídě neobjeví) jej napsat na tabuli a diskutovat, proč je špatné (vůbec nezohledňuje druhou rovnici, po zvolení *x* neumožňuje vypočítat hodnoty *y* a *z*, které se na sebe vzájemně odkazují…).

Př. 9: Vyřeš soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 4 \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}.$$

Soustava má tři neznámé (tři možnosti volby) a dvě rovnice (dvě omezující podmínky) $\Rightarrow$ zbývá nám jedna možnost volby $\Rightarrow$ jednu neznámou musíme volit. Hodnota proměnné *x* je určena druhou rovnicí $\Rightarrow$ volíme buď *y*, nebo *z*. Jednodušší je volit *z*, při dopočítávání *y* nezískáme zlomek.

Dosadíme za *x* do první rovnice a vyjádříme *y*:

$2x - y + 3z = 2 \cdot \frac{1}{2} - y + 3z = 4$ - za *z* nedosazujeme, protože je tou neznámou, kterou volíme

$1 - y + 3z = 4$

$3z - 3 = y$ $\quad\quad K = \left\{ \left[\frac{1}{2}; 3z - 3; z \right]; z \in R \right\}$

Př. 10: Urči hodnotu parametru *k* tak, aby soustava $\begin{aligned} 2x-2y+z&=3 \\ 2y+kz&=4 \\ y-3z&=4 \end{aligned}$ neměla řešení.

Soustava nemá řešení pokud obsahuje dvě rovnice, které si navzájem odporují (mají stejnou levou stranu a různé pravé strany) $\Rightarrow$ takovou dvojici rovnic můžeme získat z druhé a třetí rovnice.

$$\begin{aligned} 2x-2y+z&=3 \\ 2y+kz&=4 \\ y-3z&=4 \quad /\cdot 2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 2x-2y+z&=3 \\ 2y+kz&=4 \\ 2y-6z&=8 \end{aligned}$$

Pokud se mají levé strany rovnat, musí platit $k=-6$. V takovém případě soustava nemá řešení (levé strany se shodují, pravé se liší $\Rightarrow$ jde o dvojici podmínek, kterou není možné splnit naráz).

Př. 11: Urči hodnotu parametrů *k*, *l* tak, aby soustava $\begin{aligned} 2x-2y+z&=3 \\ 2y+4kz&=l \\ y-3z&=4 \end{aligned}$ měla nekonečně mnoho řešení.

Soustava má nekonečně mnoho řešení pokud obsahuje dvě stejné rovnice $\Rightarrow$ takovou dvojici rovnic zkusíme získat z druhé a třetí rovnice.

$$\begin{aligned} 2x-2y+z&=3 \\ 2y+4kz&=l \\ y-3z&=4 \quad /\cdot 2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 2x-2y+z&=3 \\ 2y+4kz&=l \\ 2y-6z&=8 \end{aligned}$$

Pokud mají být obě strany stejné, musí platit $4k=-6 \Rightarrow k=-\frac{3}{2}$, $l=8$.

Shrnutí: Pokud je soustava rovnic zapsána v horním trojúhelníkovém tvaru, z počtu rovnic a neznámých můžeme rychle určit její řešení.