

2.3.14 Soustavy více rovnic o více neznámých II

Předpoklady: 2313

Pedagogická poznámka: U odčítání rovnic je třeba se připravit na to, že slabší část třídy bude různě rozepisovat mezivýpočty, vynechávat rovnice, přidávat další apod. Udržení přehledu je základním předpokladem úspěšného řešení. Pro odčítání rovnic je výhodný i důsledný zápis pod sebe. Postupně provádím výpočet na tabuli s tím, že by v sešitech (minimálně u prvního příkladu) mělo být přesně to, co je na tabuli. Nechávám čas na rozmyšlenou před vymyšlením úpravy a před jejím provedením. Vždy je zapíšu na tabuli a znovu čekám. Mezitím běhám po třídě a škrťám v sešitech mezivýpočty, dopisuji chybějící rovnice a přepisuji poznámky o provedených operacích.

$$x + 2y - z = 0$$

Př. 1: Vyřeš soustavu rovnic $2x - y + 2z = 6$.

$$x + y + z = 6$$

Problém: Soustava není v trojúhelníkovém tvaru.

⇒ Pomocí sčítací metody upravíme soustavu do trojúhelníkového tvaru. Jednu z rovnic si necháme v původním tvaru a budeme s její pomocí upravovat ostatní. Budeme ji psát na prvním místě, proto před zahájením úprav rovnice proházíme tak, aby první byla ta nejjednodušší (s nejjednoduššími koeficienty před neznámými).

$$x + 2y - z = 0$$

$$2x - y + 2z = 6$$

$$x + y + z = 6$$

$$x + y + z = 6$$

$$x + 2y - z = 0$$

(třetí rovnici jsme dali na první místo)

$$2x - y + 2z = 6$$

$$x + y + z = 6$$

$$\begin{array}{l} \llbracket 2 \rrbracket - \llbracket 1 \rrbracket \\ \llbracket 3 \rrbracket - 2 \cdot \llbracket 1 \rrbracket \end{array} \quad \begin{array}{l} y - 2z = -6 \\ -3y = -6 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \llbracket 2 \rrbracket - \llbracket 1 \rrbracket \\ \llbracket 3 \rrbracket - 2 \cdot \llbracket 1 \rrbracket \end{array} \quad \begin{array}{l} y - 2z = -6 \\ -3y = -6 \end{array} \quad /: (-3)$$

$$x + y + z = 6$$

$$y - 2z = -6$$

$$y = 2$$

Určili jsme hodnotu y , dosadíme ji do druhé rovnice a vypočteme z :

$$y - 2z = -6 \Rightarrow 2 - 2z = -6$$

$$-2z = -8$$

$$z = 4$$

Hodnoty z a y dosadíme do první rovnice a vypočteme x :

$$x + y + z = 6 \Rightarrow x + 2 + 4 = 6$$

$$x = 0$$

$$K = \{[0; 2; 4]\}$$

$$x + 2y - z = 0$$

Př. 2: Vyřeš soustavu rovnic $2x - y + 2z = 6$ dosazovací metodou.

$$x + y + z = 6$$

Dosazovací metoda: vyjádříme si neznámou a dosazením zmenšíme počet neznámých ve zbývajících rovnicích

$$x + 2y - z = 0$$

$$2x - y + 2z = 6$$

$$x + y + z = 6$$

\Rightarrow Z poslední rovnice vyjádříme z : $x + y + z = 6 \Rightarrow z = 6 - x - y$.

Dosadíme do první rovnice: $x + 2y - (6 - x - y) = 0$.

Dosadíme do druhé rovnice: $2x - y + 2(6 - x - y) = 6$.

$$\text{Jednodušší soustava: } \begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ -3y = -6 \end{cases}$$

Nemusíme dále dosazovat: $y = 2$.

Vypočteme x : $2x + 3 \cdot 2 = 6 \Rightarrow x = 0$.

Vypočteme z : $z = 6 - 0 - 2 = 4$.

$$K = \{[0; 2; 4]\}$$

Pedagogická poznámka: Tento příklad je spíš cvičením toho, jak hluboce studenti pochopili princip dosazovací metody a zda jsou schopni postup použít i na složitější příklad. Část třídy, která má s prvním příkladem problémy, jej vynechává.

$$x - y + 2z = 5$$

Př. 3: Vyřeš soustavu rovnic $x + 2y - z = 1$ sčítací metodou.

$$2x + y + z = 4$$

$$x - y + 2z = 5$$

$$x + 2y - z = 1$$

$$2x + y + z = 4$$

$$x - y + 2z = 5$$

$$[1] - [2] \quad -3y + 3z = 4$$

$$2[1] - [3] \quad -3y + 3z = 6$$

Druhá a třetí rovnice si navzájem odporují \Rightarrow soustava nemá řešení.

$$K = \emptyset$$

Pedagogická poznámka: Třetí příklad by žáci měli řešit zcela samostatně. Je v něm možné odhalit největší automaty. V obou předchozích příkladech obsahuje druhá rovnice dvojnásobek x , třetí pouze x , používá se proto dvojice úprav $2[1] - [2]$ a $[1] - [3]$. Žáci, kteří použijí stejné úpravy i v předchozím příkladu, vůbec netuší, o co při úpravách soustav jde a je třeba si s nimi individuálně popovídat.

Dodatek: Skutečnost, že soustava nemá řešení, je vidět i z dokončení úpravy na trojúhelníkový tvar.

$$\begin{array}{r} x - y + 2z = 5 \\ -3y + 3z = 4 \\ \hline \text{[[2]]} - \text{[[3]]} \quad 0 = -2 \end{array}$$

Dodatek: Pro srovnání řešení předchozí soustavy dosazovací metodou.

Z poslední rovnice vyjádříme z : $z = x + 2y - 1$. Dosazujeme do zbývajících rovnic:

$$\begin{array}{r} x - y + 2(x + 2y - 1) = 5 \\ x - y + 2x + 4y - 2 = 5 \qquad 2x + y + x + 2y - 1 = 4 \\ 3x + 3y = 3 \quad /:3 \qquad 3x + 3y = 5 \\ x + y = 1 \end{array}$$

Z první rovnice vyjádříme y a dosadíme do druhé: $y = 1 - x$

$$\begin{array}{r} 3x + 3(1 - x) = 5 \\ 3x + 3 - 3x = 5 \Rightarrow \text{soustava nemá řešení.} \\ 2 = 5 \end{array}$$

Nezaujatý pozorovatel musí uznat, že sčítací metoda je rychlejší.

$$y - z = -2$$

Př. 4: Vyřeš soustavu rovnic $x - 2y + z = 1$ sčítací metodou.

$$2x + z = 6$$

Přerovnáme rovnice tak, aby na začátku byly rovnice, které obsahují x .

$$\begin{array}{r} x - 2y + z = 1 \\ 2x + z = 6 \\ y - z = -2 \\ \hline x - 2y + z = 1 \\ 2\text{[[1]]} - \text{[[2]]} \quad -4y + z = -4 \\ y - z = -2 \\ \hline x - 2y + z = 1 \\ -4y + z = -4 \\ \text{[[2]]} + 4\text{[[3]]} \quad -3z = -12 \end{array}$$

$$z = 4$$

Dopočteme dosazováním do zbývajících rovnic: $-4y + z = -4y + 4 = -4$

$$-4y = -8$$

$$y = 2$$

$$x - 2y + z = x - 2(2) + 4 = 1$$

$$x = 1$$

$$K = \{[1; 2; 4]\}$$

Pedagogická poznámka: Upozorňuji žáky na to, že i když po přerovnání druhá rovnice neobsahovala y , po odstranění x se v ní y opět objevilo (obsahovala ho rovnice, kterou jsme použili k odstranění x).

Pedagogická poznámka: Poslední krok u předchozí soustavy by šel udělat jednodušeji:

$$x - 2y + z = 1$$

$$-4y + z = -4.$$

$$[[2]] + [[3]] \quad -3y = -6$$

U žáků, kteří na to přijdou (a v soustavách se orientují), je takový postup samozřejmě lepší, u slabších na něm netrvám.

$$a + b + c - d = 2$$

Př. 5: Vyřeš soustavu rovnic $a - b + 2c + d = -3$ sčítací metodou.

$$2b + c + 2d = 3$$

$$a + b + c - d = 2$$

$$a - b + 2c + d = -3$$

$$2b + c + 2d = 3$$

$$a + b + c - d = 2$$

$$[[1]] - [[2]] \quad 2b - c - 2d = 5$$

$$2b + c + 2d = 3$$

$$a + b + c - d = 2$$

$$2b - c - 2d = 5$$

$$[[2]] - [[3]] \quad -2c - 4d = 2 \quad /: (-2)$$

$$a + b + c - d = 2$$

$$2b - c - 2d = 5$$

$$c + 2d = -1$$

Soustava tří rovnic o čtyřech neznámých \Rightarrow na čtyři možnosti volby pouze tři podmínky \Rightarrow jedna volba zůstává, nekonečně mnoho řešení, volíme neznámou d , zbytek vyjádříme.

$$c = -1 - 2d$$

Druhá rovnice: $2b - c - 2d = 2b - (-1 - 2d) - 2d = 5.$

$$2b + 1 + 2d - 2d = 5$$

$$2b = 4$$

$$b = 2$$

První rovnice: $a + b + c - d = a + 2 + (-1 - 2d) - d = 2.$

$$a + 2 - 1 - 2d - d = 2$$

$$a = 1 + 3d \quad K = \{[1 + 3d; 2; -1 - 2d; d]; d \in R\}$$

Pedagogická poznámka: Na tabuli do výsledků píší $[1; 2; -1; 0] \in K$. Ti nejchytřejší žáci, kteří se k příkladu dostanou, by to měli pochopit.

Př. 6: Petáková:
strana 16/cvičení 31 a) b) d)

Shrnutí: Při řešení soustav rovnic musíme dbát na úpravu a přehlednost.