2.3.19 Slovní úlohy vedoucí na soustavy rovnic II

Předpoklady: 020319

Př. 1: Správce fotbalového komplexu má k dispozici dvě sekačky na trávu. Když poprvé přivezli novou sekačku pracoval se starou už devět hodin. Přesedl zkusmo na novou a za hodinu práci dokončil. Od té doby seká pouze novou sekačkou. Pouze v případě, že práce hodně pospíchá seká i jeho asistent se starou a pak jsou společně hotoví za 3 hodiny. Jak dlouho seká správce areál novou sekačkou? Jak dlouho trvalo sekání starou?

Neznámé: stará sekačka poseká vše za s hodin za 1 hodinu $\frac{1}{s}$ celé práce

nová sekačka poseká vše za n hodin za 1 hodinu $\frac{1}{n}$ celé práce

Rovnice:
pracoval se starou už devět hodin a s novou za hodinu práci dokončil
$$9\cdot\frac{1}{s}+\frac{1}{n}=1$$
seká i jeho asistent se starou a pak jsou společně hotoví za 3 hodiny
$$3\cdot\frac{1}{s}+3\cdot\frac{1}{n}=1$$
Soustava (po substituci $\frac{1}{s}=a$, $\frac{1}{n}=b$):
$$9a+b=1$$
$$3a+3b=1$$
$$9a+b=1$$
$$[\![1]\!]-3[\![3]\!] \qquad -8b=-2$$

$b=\frac{1}{4}$ $\qquad 3a+3\cdot\frac{1}{4}=1$ $\qquad 3a=\frac{1}{4}$ $\qquad a=\frac{1}{12}$

Vrátíme se k původním proměnným:
$$\frac{1}{s}=a=\frac{1}{12}\Rightarrow s=12$$
$$\frac{1}{n}=b=\frac{1}{4}\Rightarrow n=4$$
Nová sekačka poseká areál za 4 hodiny, stará za 12 hodin.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je zařazen spíš k tomu, aby s zjistilo, jak jsou studenti schopni si pamatovat obsah z minulé hodiny. Ze tří příkladů na společnou práci (poslední dva z minulé hodiny a tento) mají studenti jednoznačně největší úspěšnost při řešení posledního příkladu z minulé hodiny (brigádnice), který je z hlediska sestavení rovnic nejtěžší. Skutečnost přestává být paradoxní ve chvíli, kdy si uvědomíme, že pouze při řešení tohoto příkladu mají v naprosto čerstvé paměti, jak se příklady na společnou práci řeší. Že však někteří nejsou schopni si trik osvěžit ani druhý den (navíc s poznámkami v ruce), vidím jako velký problém.

Př. 2: Máme směs lihu a vody. Kdybychom k ní přilili 3 l čistého lihu, dostali bychom 70% roztok lihu. Kdybychom k němu přilili 1 l vody, získali bychom 50% roztok lihu. Urči objem směsi.

Neznámé: voda v
líh l
$\Rightarrow$ objem směsi $v+l$

Rovnice:

přilitím 3 l čistého lihu, bychom dostali 70% roztok $\quad \frac{\text{líh}}{\text{roztok}} = \frac{l+3}{l+3+v} = 0,7$

přilitím 1 l vody, bychom získali 50% roztok lihu $\quad \frac{\text{líh}}{\text{roztok}} = \frac{l}{l+v+1} = 0,5$

Soustava:

$$\frac{l+3}{l+3+v} = 0,7 \qquad /\cdot(l+3+v)$$
$$\frac{l}{l+v+1} = 0,5 \qquad /\cdot(l+v+1)$$

$$l+3 = 0,7l + 2,1 + 0,7v \qquad /\cdot 10$$
$$l = 0,5l + 0,5v + 0,5 \qquad /\cdot 10$$

$$10l + 30 = 7l + 21 + 7v$$
$$10l = 5l + 5v + 5$$

$$3l - 7v = -9$$
$$5l - 5v = 5$$

$$3l - 7v = -9$$
$$l - v = 1 \Rightarrow l = 1 + v$$

$$3(1+v) - 7v = -9$$
$$3 + 3v - 7v = -9$$
$$12 = 4v$$
$$v = 3$$

Dopočítáme objem lihu: $l = 1 + v = 1 + 3 = 4$
Objem směsi: $v + l = 3 + 4 = 7$

Směs má objem 7 litrů.

Pedagogická poznámka: Velká většina studentů se na příklad snaží aplikovat směšovací rovnici. V první fázi se jim snažím pomoci tím, že jim na tabuli spočítám, že koncentrace směsi z 1 litru lihu a 3 litrů vody je 25%. Někteří se chytnou, zbytek potřebuje ukázat sestavení první rovnice, aby dokázal napsat druhou.

Př. 3: Trojciferné přirozené číslo *n* má ciferný součet 15. Zapíšeme-li číslice tohoto čísla v opačném pořadí, dostaneme číslo, které je o 99 menší než číslo *n*. Dělíme-li se zbytkem prostřední číslici čísla *n* součtem jeho krajních číslic, dostaneme podíl 1 a zbytek rovněž 1. Urči číslo *n*.

Neznámé: *xyz* = cifry čísla $\Rightarrow$ $100x+10y+z$ - číslo *n*

Rovnice:

Trojciferné přirozené číslo *n* má ciferný součet 15. $x+y+z=15$

Zapíšeme-li číslice tohoto čísla v opačném pořadí, dostaneme číslo, které je o 99 menší než číslo *n*. $100x+10y+z-99=100z+10y+x$

Dělíme-li se zbytkem prostřední číslici čísla *n* součtem jeho krajních číslic, dostaneme podíl 1 a zbytek rovněž 1 $y=(x+z)+1$

Upravíme rovnice:

$100x+10y+z-99=100z+10y+x \Rightarrow 99x-99z=99 \Rightarrow x-z=1$

$y=(x+z)+1 \Rightarrow -x+y-z=1$

Soustava:

$$\begin{aligned} x+y+z&=15\\ x\qquad -z&=1\\ -x+y-z&=1 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} & x+y+z=15\\ [\![1]\!]-[\![2]\!] & y+2z=14\\ [\![1]\!]+[\![3]\!] & 2y\qquad =16 \Rightarrow y=8 \end{array}$$

Dosadíme: $y+2z=14 \Rightarrow 8+2z=14 \Rightarrow z=3$

$x+y+z=15 \Rightarrow x+8+3=15 \Rightarrow x=4$

Hledané číslo je 483.

Př. 4: Máme k dispozici 20%, 30 % a 40% roztok lihu. Kolik kilogramů, kterého roztoku musíme smíchat, abychom dostali 15 kg 35% roztoku?

Neznámé: množství 20 % lihu x

30 % lihu y

40 % lihu z

Rovnice: získat 15 kg roztoku $x+y+z=15$

získat 35 % roztok $0,2x+0,3y+0,4z=0,35(x+y+z)$ (množství čistého lihu v jednotlivých roztocích se rovná množství čistého lihu ve výsledném roztoku)

$x+y+z=15$

$0,2x+0,3y+0,4z=0,35(x+y+z) \quad /\cdot 20$

Upravíme druhou rovnici:

$4x+6y+8z=7(x+y+z)$

$3x+y-z=0$

Soustava:

$x+y+z=15$

$3x+y-z=0$

Tři neznámé, jenom dvě rovnice $\Rightarrow$ za jednu neznámou budeme volit, ostatní dvě budeme pomocí této vyjadřovat.
Zvolíme třeba *z* a s jeho pomocí vyjádříme ostatní neznámé:
$3x + y - z = 0 \Rightarrow y = z - 3x$
Dosadíme do první rovnice za *y*: $x + z - 3x + z = 15$
$-2x = 15 - 2z$
$x = z - 7,5$
Určíme *y*:
$y = z - 3x = z - 3(z - 7,5) = z - 3z + 22,5 = 22,5 - 2z$
Matematické řešení: $K = \{[z - 7,5; 22,5 - 2z; z], z \in R\}$
Problém: V matematice můžeme za *z* dosadit libovolné reálné číslo a může nám vyjít libovolné reálné číslo za *x* i *y*, tedy i záporné, ale jak budeme do směsi přilévat záporné množství nějakého roztoku?
$\Rightarrow$ Musíme zjistit, co můžeme dosadit za *z*, aby množství libovolného roztoku nebylo záporné.

- $x = z - 7,5 \geq 0 \Rightarrow z \geq 7,5$
- $y = 22,5 - 2z \geq 0 \Rightarrow z \leq 11,25$

Výsledný roztok můžeme smíchat nekonečně mnoha způsoby v závislosti na tom, kolik do něj přidáme roztoku o 40% koncentraci. Roztoku o 40% koncentraci můžeme použít od $7,5$ do $11,25$ kg, pokud jej použijeme *z* kg musíme použít i $22,5 - 2z$ kg 30% roztoku a $z - 7,5$ kg 20% roztoku. $K = \{[z - 7,5; 22,5 - 2z; z], z \in \langle 7,5; 11,25 \rangle\}$

Pedagogická poznámka: Hodně studentů hlásí u předchozího příkladu chybu v zadání, protože tuší, že na jednoznačné určení množství roztoků by potřebovali tři rovnice (a mají pouze dvě). Je to asi důsledek jejich školní výchovy, která se tváří jakoby existovaly pouze jednoznačné problémy s jednoznačným zadáním a jednoznačným řešením. Skutečnost je jiná a proto považuji předchozí příklad za obzvlášť důležitý.

Pedagogická poznámka: Rychlejším studentům samozřejmě uvedené příklady nemůžou stačit. Ve zbytku hodiny si samostatně počítají se sbírky.

Shrnutí: