

## 2.4.1 Funkce absolutní hodnota

**Předpoklady:** 1208, 2107

$|x|$  - zničí znaménko čísla, všechna čísla změni na nezáporná

**Jak vyjádřit matematicky?**

- **Pomocí číselné osy:**

$|x|$  je vzdálenost obrazu čísla na číselné ose od počátku.

- **Pomocí rovností:**

$x \in (-\infty; 0) \Rightarrow |x| = -x$  (zápornému číslu absolutní hodnota změni znaménko)

$x \in \langle 0; \infty) \Rightarrow |x| = x$  (s kladným číslem nic nedělá)

- **Pomocí mocniny:**

$|x| = \sqrt{x^2}$  ( $\Rightarrow \sqrt{x^2} \neq x$ , protože umocněním ztratím znaménko)

**Př. 1:** Rozhodni zda z pravidla „ $x \in (-\infty; 0) \Rightarrow |x| = -x$ “ vyplývá, že absolutní hodnota je pro některá čísla záporná.

$x \in (-\infty; 0) \Rightarrow |x| = -x$  neznamená, že  $|x|$  je záporná

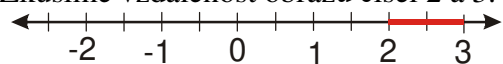
Naopak například pro  $x = -2$  platí  $|x| = -x \Rightarrow |-2| = -(-2) = 2 \Rightarrow$  mínus dělá ze záporných čísel čísla kladná,

**Pravidla pro výpočty s absolutní hodnotou:**

$$|a| \geq 0 \qquad |a| = |-a| \qquad |ab| = |a| \cdot |b| \qquad b \neq 0 \Rightarrow \frac{|a|}{|b|} = \frac{|a|}{|b|}$$

Jde určit pomocí absolutní hodnoty i vzdálenost obrazů čísel od sebe navzájem (nejenom obrazu čísla od nuly)?

Zkusíme vzdálenost obrazů čísel 2 a 3.



$\Rightarrow$  Vzdálenost jejich obrazů na číselné ose je 1.

Zkusíme vzdálenost spočítat pomocí absolutní hodnoty:  $1 = 3 - 2 = |3 - 2|$  a  $1 = |-1| = |2 - 3|$


$\Rightarrow$  zřejmě stačí spočítat rozdíl čísel a udělat z něj absolutní hodnotu (aby nezáleželo na pořadí při odčítání).

Jak s tím souvisí pravidlo, že  $|x|$  je vzdálenost obrazu čísla  $x$  od počátku?

Zřejmě  $|x| = |x - 0| = |0 - x| = |-x| \Rightarrow$  opět absolutní hodnota z rozdílu dvou čísel.

**Hypotéza:** Absolutní hodnota z rozdílu dvou čísel  $|a - b|$  se rovná vzdálenosti jejich obrazů na číselné ose.

**Př. 2:** Ověř, že hypotéza platí i pro čísla 3 a -2.

Čísla 3 a -2  $\Rightarrow$    $\Rightarrow$  vzdálenost obrazů je 5.

Spočítáme absolutní hodnoty z rozdílů:

- $|3 - (-2)| = |3 + 2| = 5$
- $|-2 - 3| = |-5| = 5$ .

Hypotéza platí i pro čísla 3 a -2.

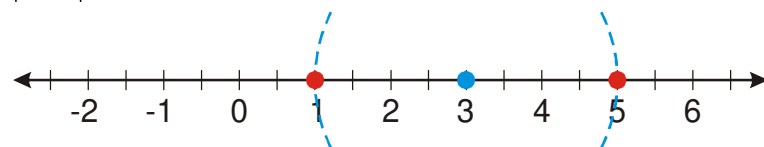
**Pedagogická poznámka:** Pokud příklad počítáme ve třídě, dostává minimálně každá řada jiné zadání - například dvojice -2, 3 a -4, -6.

Matematický důkaz jsme neprovedli, ale hypotézu budeme brát za dokázanou.

**Absolutní hodnota z rozdílu dvou čísel  $|a - b|$  se rovná vzdálenosti jejich obrazů na číselné ose.**

**Př. 3:** Vyřeš rovnici  $|x - 3| = 2$ .

$|x - 3| = 2 \Leftrightarrow$  hledáme čísla vzdálená od 3 o 2.

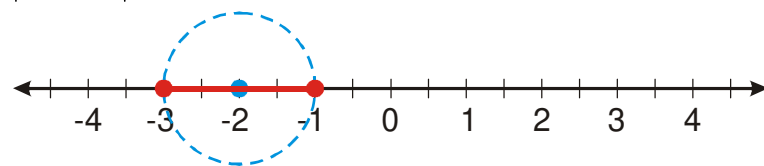


$$K = \{1; 5\}$$

**Př. 4:** Vyřeš nerovnici  $|x + 2| \leq 1$ .

Pokud chceme použít pravidlo pro vzdálenost, musíme uvnitř absolutní hodnoty vytvořit rozdíl:  $|x + 2| = |x - (-2)|$

$|x - (-2)| \leq 1 \Leftrightarrow$  hledáme čísla vzdálená od -2 o 1 nebo méně.



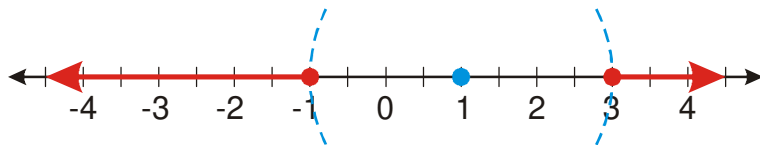
$$K = \langle -3; -1 \rangle$$

**Př. 5:** Vyřeš nerovnici  $|1 - x| > 2$ .

V absolutní hodnotě máme rozdíl, ale  $x$  je až druhé.

Naštěstí to nevadí (zkoušeli jsme při odvozování pravidla, že na pořadí v rozdílu nezáleží), navíc platí  $|a| = |-a|$  a tedy  $|1 - x| = |-(1 - x)| = |x - 1|$

$|1 - x| > 2 \Leftrightarrow$  hledáme čísla vzdálená od 1 více než o 2.



$$K = (-\infty; -1) \cup (3; \infty)$$

**Pedagogická poznámka:** Na objevování grafu funkce  $y = |x|$  je potřeba minimálně 10 minut, spíše čtvrt hodiny. Obě metody, které používáme, budeme potřebovat v dalším studiu velice často a je nutné, aby je studenti měli možnost alespoň částečně pochopit už teď na nejjednodušším příkladě.

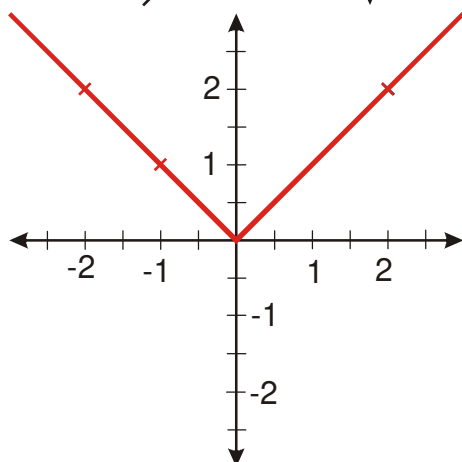
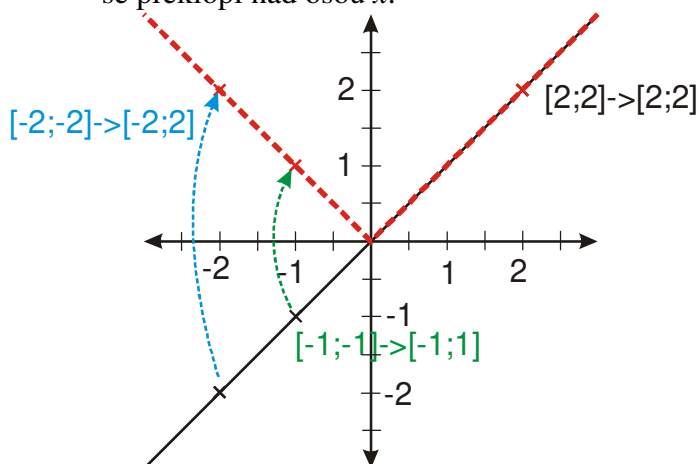
Jak vypadá graf funkce  $y = |x|$ ?

Zjistíme to bez tečkování:

### 1. pomocí grafu funkce $y = x$ .

Co dělá absolutní hodnota s dosazenými čísly (s  $y$ -ovými souřadnicemi funkce  $y = x$ )?

- Kladné nemění  $\Rightarrow$  body nad osou  $x$  (kladná hodnota  $y$ ) zůstanou.
- Záporné změní na kladné  $\Rightarrow$  body pod osou  $x$  (záporná hodnota  $y$ ) změní na body s kladnou  $y$ -ovou souřadnicí ( $[-1; -1] \Rightarrow [-1; 1]; [-2; -2] \Rightarrow [-2; 2]$ )  $\Rightarrow$  levá část grafu se překlopí nad osou  $x$ .

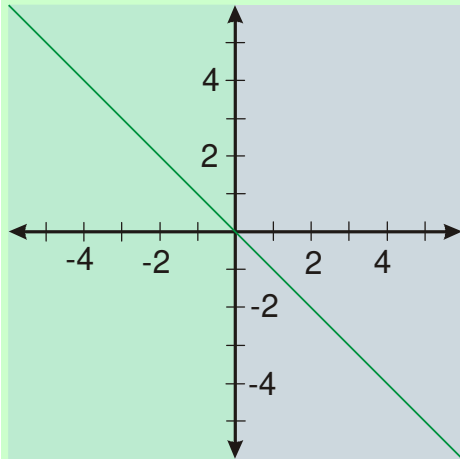


### 2. pomocí odstraňování absolutní hodnoty

Podle předpisu na začátku kapitoly se zbavíme absolutní hodnoty a získáme lineární funkci pro část definičního oboru. Tyto částečné funkce spojíme na výsledek. Při odstraňování záleží, zda je  $x$  kladné nebo záporné.

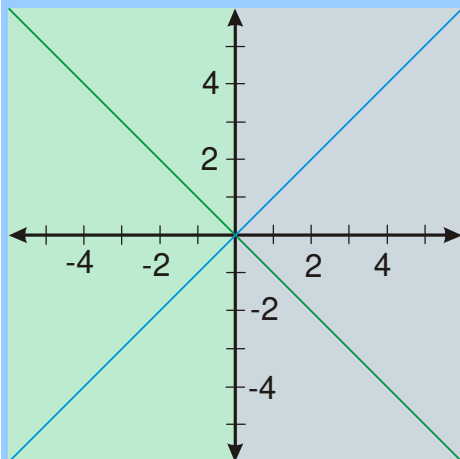
1)  $x \in (-\infty; 0)$ , část obrázku nalevo od osy  $y$

$$x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow y = |x| = -x$$

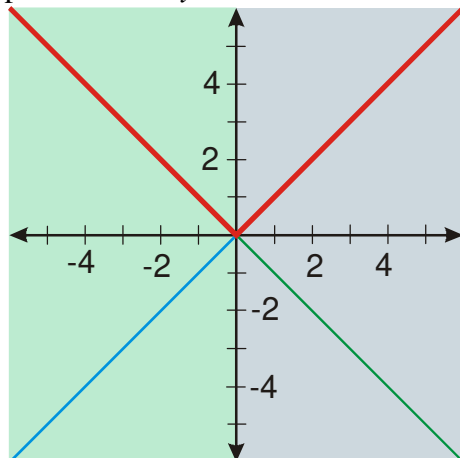


2)  $x \in (0; \infty)$ , část obrázku napravo od osy  $y$

$$x > 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow y = |x| = x$$



V levé (zelené) části vytáhneme zelenou a v pravé (modré) modrou čáru. Obě čáry by se měly potkat na ose  $y$ .



Stejný výsledek – zřejmě jsme postupovali správně.

**Př. 6:** Rozhodni, jak by se vlastnosti absolutní hodnoty měly projevit na jejím grafu. Proveď kontrolu získaného grafu funkce  $y = |x|$ . Můžeme po těchto kontrolách považovat obrázek za jistě správný?

Vlastnosti absolutní hodnoty by se na grafu měly projevit takto:

- v bodě  $x = 0$  musí platit  $y = 0$  (obraz nuly leží v počátku a má od něj tedy nulovou vzdálenost),
- všechny hodnoty funkce musí být nezáporné (platí  $|a| \geq 0$ ),
- funkce být sudá (musí mít pro navzájem opačná čísla stejné hodnoty, protože platí  $|a| = |-a|$ ),
- funkce musí růst jako funkce  $y = x$ , protože takto roste vzdálenost bodů od počátku.

Získaný graf všechny tyto požadavky splňuje, přesto ho nemůžeme považovat za jistě správný, existuje mnoho jiných grafů, které všechny uvedené požadavky splňují a nejsou grafy funkce  $y = |x|$ .

**Poznámka:** Předchozí odstavec nijak nesnižuje důležitost podobných kontrol při řešení libovolného problému. Naopak schopnost průběžné kontroly je velmi důležitá.

**Shrnutí:** Funkce absolutní hodnota se v různých částech definičního oboru chová různě, graf má tvar písmene V.