

2.4.4 Kreslení grafů funkcí metodou dělení definičního oboru I

Předpoklady: 2401, 2208

Opakování:

Pokud jsme při řešení nerovnic potřebovali vynásobit nerovnici výrazem, nemohli jsme postupovat pro všechna čísla najednou. Výpočet jsme rozdělili do větších a každou větví řešili zvlášť (= metoda dělení definičního oboru).

Jak ji použiji na grafy funkcí s absolutními hodnotami?

Určím si, kdy výrazy v jednotlivých absolutních hodnotách mění znaménko. Pomocí získaných čísel rozdělím R na intervaly, ve kterých mohu každou z absolutních hodnot nahradit závorkou. V každém z intervalů tak získám lineární funkci, spojením těchto částečných lineárních funkcí pak celý graf (tímto způsobem jsme ověřovali graf funkce absolutní hodnota na konci hodiny 2401).

Pedagogická poznámka: Když tuto hodinu učím, zopakuji získání grafu funkce $y = |x|$, před zadáním příkladu 1.

Pedagogická poznámka: Zatím se mi nepodařilo u této hodiny najít správnou míru mezi samostatným počítáním v lavicích a společným kontrolováním na projektoru. Studenti mají při kreslení značné problémy (související s tím, že nedostatečně chápou nebo nedostatečně dodržují metodu) a hodně jich potřebuje pomoc. Společná kontrola je nutná minimálně po příkladech s pedagogickou poznámkou. Protože zadání příkladů obsahuje pouze předpisy funkcí je možné je přepsat na tabuli a nechávat řešení na projektoru delší dobu.

Pedagogická poznámka: Graf s nevytaženým výsledkem je u všech příkladů nakreslen dvakrát schválně. Jde o to, abych mohl studentům ukázat nakreslené funkce pro jednotlivé intervaly a zároveň ještě neviděl vytažený výsledek.

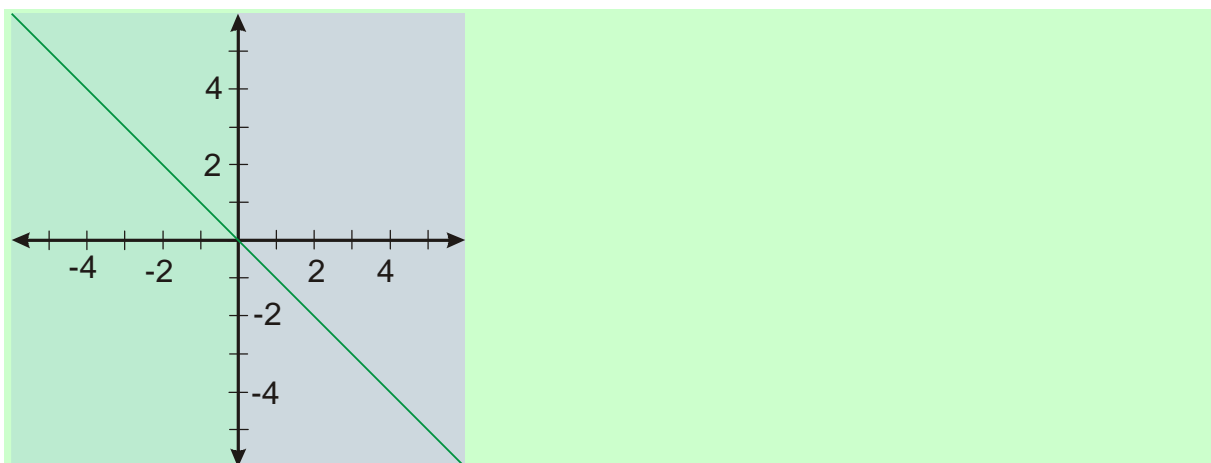
Pedagogická poznámka: Postup s projektorem by měl být uzpůsoben spíše pomalejší části třídy. Přesto je potřeba zároveň kontrolovat (zejména v následující hodině) i ty rychlejší, aby se zbytečně netrápili na některých chytácích a neztráceli zbytečně mnoho času.

Opakování (kreslení grafu funkce $y = |x|$): Podle předpisu pro odstraňování absolutní hodnoty se jí zbavíme a získáme lineární funkci pro část definičního oboru. Tyto částečné funkce spojíme na výsledek.

Při odstraňování záleží, zda je x (vnitřek absolutní hodnoty) kladné nebo záporné.

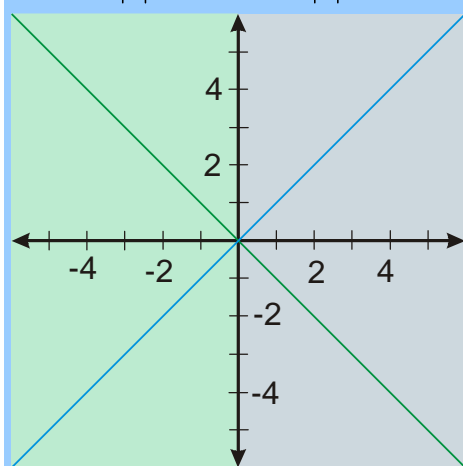
1) $x \in (-\infty; 0)$, část obrázku nalevo od osy y

$$x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow y = |x| = -x$$

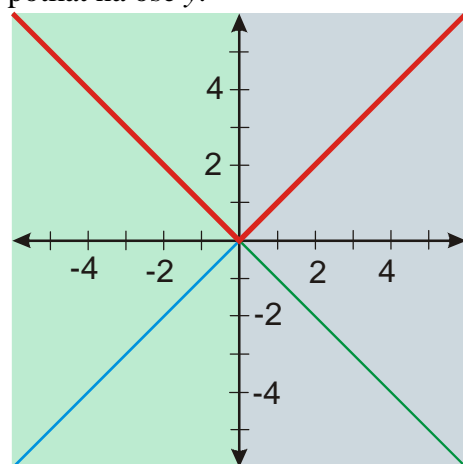


2) $x \in \langle 0; \infty \rangle$, část obrázku napravo od osy y

$$x > 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow y = |x| = x$$



V levé (zelené) části vytáhneme zelenou a v pravé (modré) modrou čáru. Obě čáry by se měly potkat na ose y .

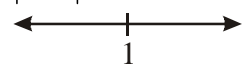


Pedagogická poznámka: Při odstraňování chyb v příkladech je třeba se dostat k tomu, aby studenti pochopili, že jejich chyba se (pokud to tak je) skrývá ve špatném dodržení postupu, který jim jinak je zcela jasný.

Př. 1: Nakresli pomocí metody dělení definičního oboru graf funkce $y = |x - 1|$.

Absolutní hodnotu můžeme odstranit podle toho, zda je uvnitř kladné nebo záporné číslo \Rightarrow zjistíme, kdy je uvnitř absolutní hodnoty nula (nulový bod) a podle něj rozdělíme definiční obor:

$$|x-1|: x-1=0 \Rightarrow x=1$$



\Rightarrow dva intervaly

1) $x \in (-\infty; 1)$

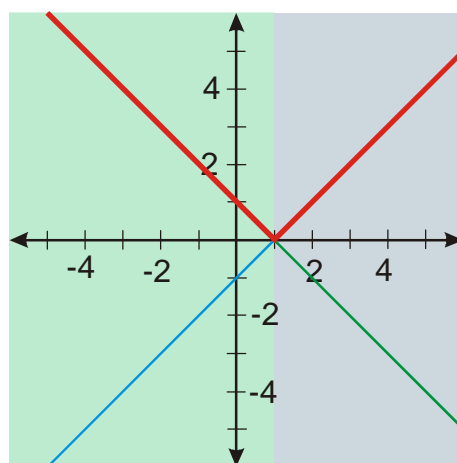
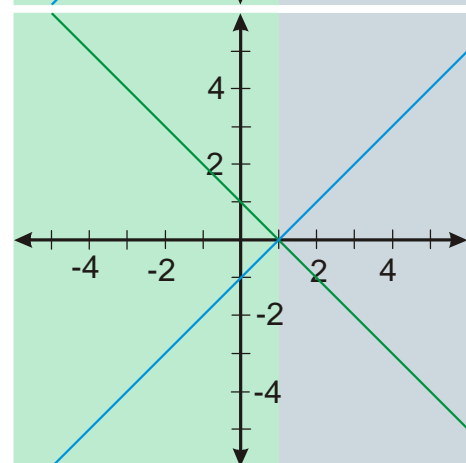
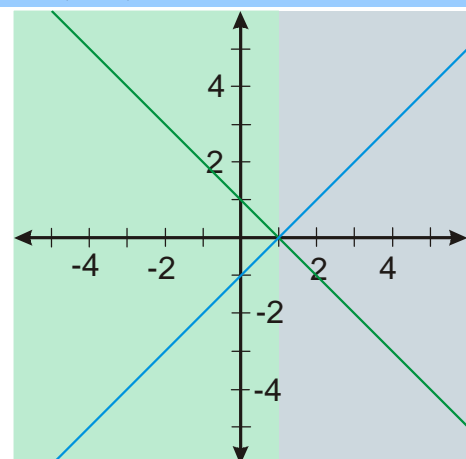
$$x < 1 \Rightarrow x - 1 < 0 \Rightarrow |x - 1| = -(x - 1) = -x + 1$$

$$y = |x - 1| = -x + 1$$

2) $x \in (1; \infty)$

$$x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0 \Rightarrow |x - 1| = x - 1$$

$$y = |x - 1| = x - 1$$

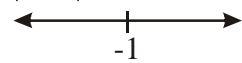


Pedagogická poznámka: Někteří studenti mají tendenci nepsat upravené předpisy funkcí s odstraněnými absolutními hodnotami. Snažím se je přesvědčit, že jde o to, aby si udrželi přehled o příkladu a u těžších příkladů (u některých již příklad 3, u všech nejpozději příklad 6) se bez nich neobejdou. Pokud jim při řešení upravené předpisy chybí, nediskutujeme o chybě, dokud příklad nevyřeší pořádně (a pak už to většinou není potřeba).

Př. 2: Nakresli pomocí metody dělení definičního oboru graf funkce $y = |x+1|$.

Absolutní hodnotu můžeme odstranit podle toho, zda je uvnitř kladné nebo záporné číslo \Rightarrow zjistíme, kdy je uvnitř nula (nulový bod) absolutní hodnoty a podle něj rozdělíme definiční obor:

$$|x+1|: x+1=0 \Rightarrow x=-1$$



\Rightarrow dva intervaly

$$1) x \in (-\infty; -1)$$

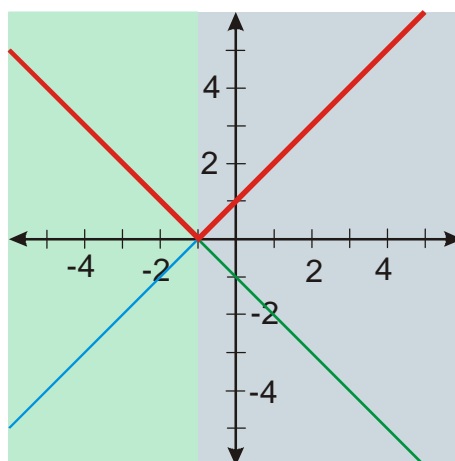
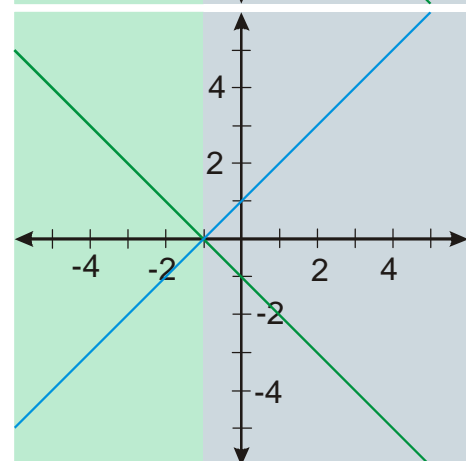
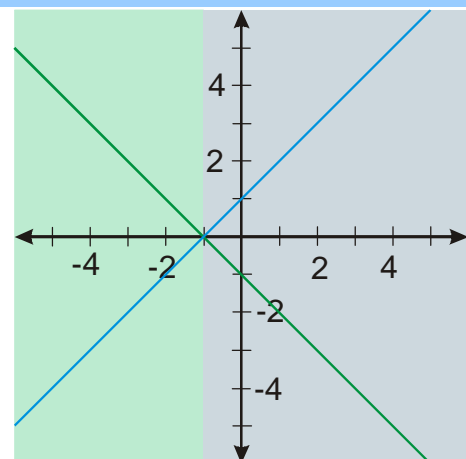
$$x < -1 \Rightarrow x+1 < 0 \Rightarrow |x+1| = -(x+1) = -x-1$$

$$y = |x+1| = -x-1$$

$$2) x \in (-1; \infty)$$

$$x > -1 \Rightarrow x+1 > 0 \Rightarrow |x+1| = x+1$$

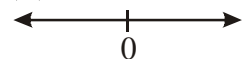
$$y = |x+1| = x+1$$



Př. 3: Nakresli pomocí metody dělení definičního oboru graf funkce $y = |x|-1$.

Zjistíme nulový bod absolutní hodnoty:

$$|x|: x=0$$



\Rightarrow dva intervaly

$$1) x \in (-\infty; 0)$$

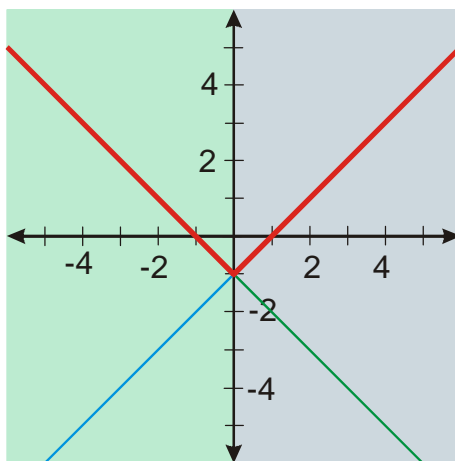
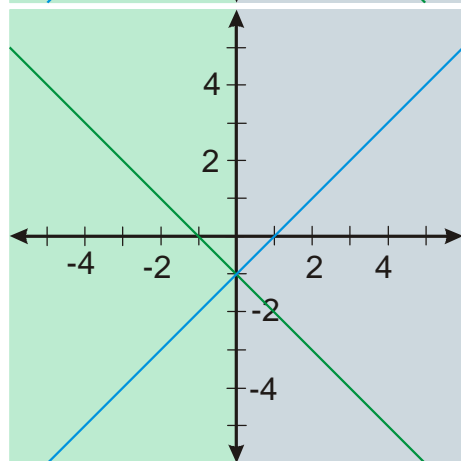
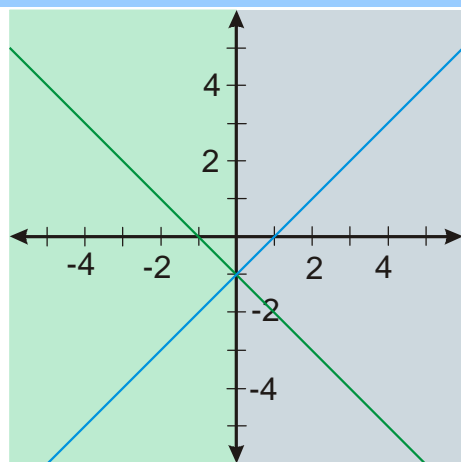
$$x < 0 \Rightarrow |x| = -x$$

$$y = |x| - 1 = -x - 1$$

$$2) x \in (0; \infty)$$

$$x > 0 \Rightarrow |x| = x$$

$$y = |x| - 1 = x - 1$$

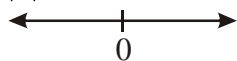


Pedagogická poznámka: Při řešení příkladu se objevují tři chyby. Někteří studenti nejsou schopni určit správně intervaly (snaží se při rozhodování o intervalu zahrnout i jedničku, která není uvnitř absolutní hodnoty), jiní při výpočtu funkcí zapomenou na jedničku (protože není uvnitř absolutní hodnoty), poslední skupina má zábrany vytahovat celý graf (protože se jim zdá, že ve výsledku by měla být pouze kladná čísla).

Př. 4: Nakresli pomocí metody dělení definičního oboru graf funkce $y = -|x| + 1$.

Zjistíme nulový bod absolutní hodnoty:

$$|x|: \quad x = 0$$



\Rightarrow dva intervaly

$$1) x \in (-\infty; 0)$$

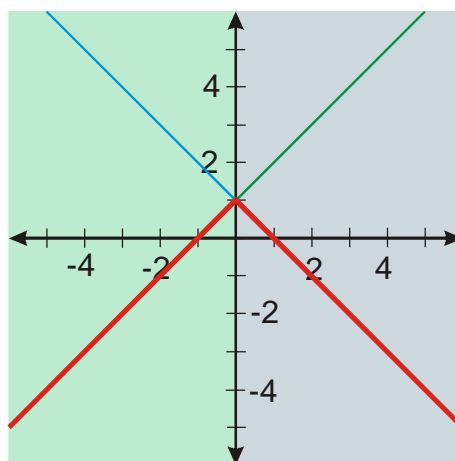
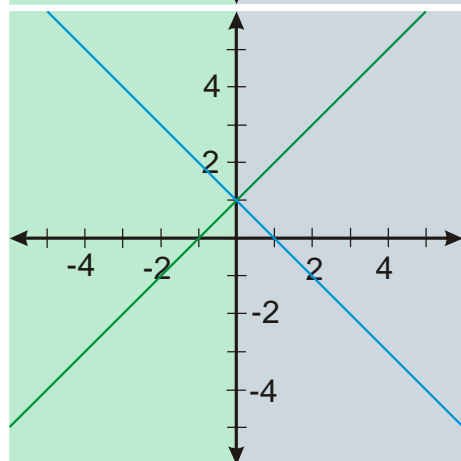
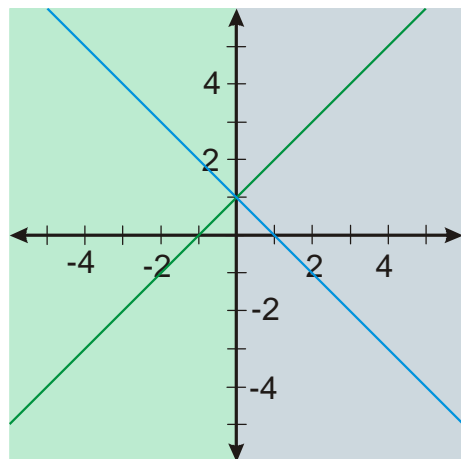
$$x < 0 \Rightarrow |x| = -x$$

$$y = -|x| + 1 = -(-x) + 1 = x + 1$$

$$2) x \in \langle 0; \infty \rangle$$

$$x > 0 \Rightarrow |x| = x$$

$$y = -|x| + 1 = -x + 1$$

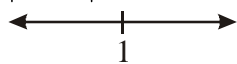


Pedagogická poznámka: Podobně jako u předchozího příkladu jsou problémy s vytažením výsledku, mnohým se nezdá, že by mohl obsahovat tolik záporných čísel. Na tomto příkladě se většinou poprvé pozná zda studenti opravdu chápou, že každému výpočtu patří pouze kus plochy graf a zda umí najít ten správný. Studenty, kteří ztroskotají, protože si nepíšou, kdy která funkce platí, upozorňuji na tento fakt.

Př. 5: Nakresli pomocí metody dělení definičního oboru graf funkce $y = |-x + 1|$.

Zjistíme nulový bod absolutní hodnoty:

$$|-x + 1|: \quad -x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$



\Rightarrow dva intervaly

$$1) x \in (-\infty; 1)$$

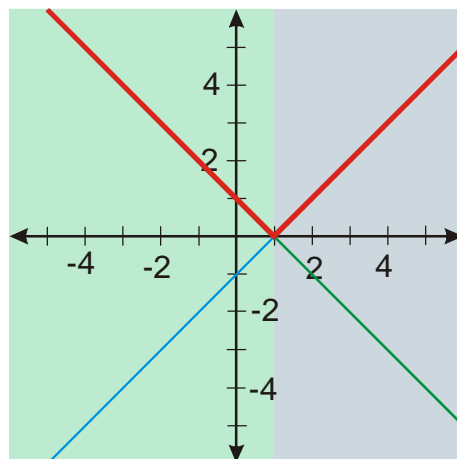
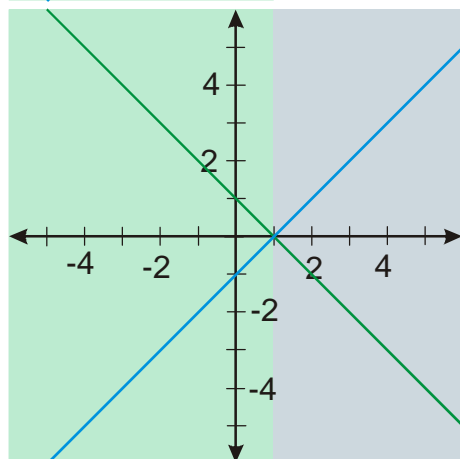
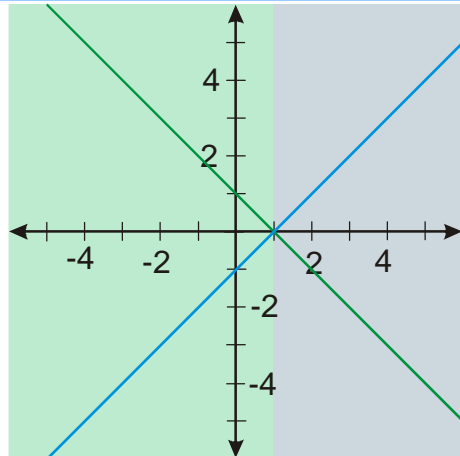
$$-x+1 > 0 \Rightarrow |-x+1| = -x+1$$

$$y = |-x+1| = -x+1$$

$$2) x \in \langle 1; \infty \rangle$$

$$-x+1 < 0 \Rightarrow |-x+1| = x-1$$

$$y = |-x+1| = x-1$$

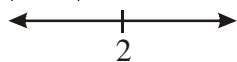


Pedagogická poznámka: Největším problémem je odstranění absolutních hodnot (pro kladná x dosazujeme do absolutní hodnoty záporné číslo).

Př. 6: Nakresli pomocí metody dělení definičního oboru graf funkce $y = |2-x| - 1$.

Zjistíme nulový bod absolutní hodnoty:

$$|2-x|: 2-x=0 \Rightarrow x=2$$



\Rightarrow dva intervaly

$$1) x \in \langle -\infty; 2 \rangle$$

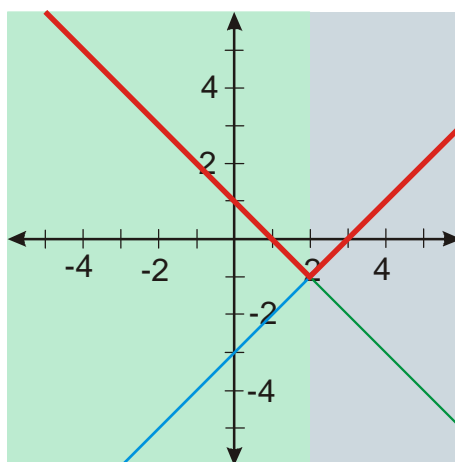
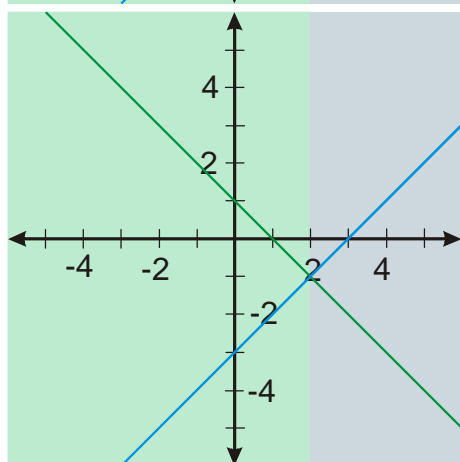
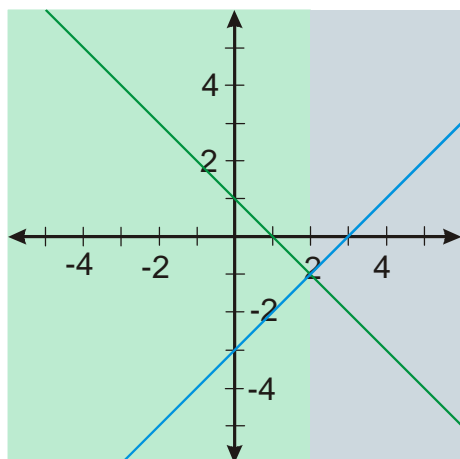
$$2-x > 0 \Rightarrow |2-x| = 2-x$$

$$y = |2-x| - 1 = 2-x-1 = -x+1$$

$$2) x \in \langle -2; \infty \rangle$$

$$2-x < 0 \Rightarrow |2-x| = -(2-x) = x-2$$

$$y = |2 - x| - 1 = x - 2 - 1 = x - 3$$



Pedagogická poznámka: Studenti mívají zábrany při sčítání dvojky (pocházející z absolutní hodnoty) a jedničkou.

Pedagogická poznámka: Lepší studenti určitě stihnou bez problémů spočítat všechny příklady včetně Petákové, ti horší však budou mít dost práce i s prvními šesti, proto hodina neobsahuje více příkladů.

Př. 7: Petáková:
strana 28/cvičení 40 f_1, h_2, g_1

Shrnutí: Dělení definičního oboru můžeme využít i při kreslení grafů s absolutní hodnotou.