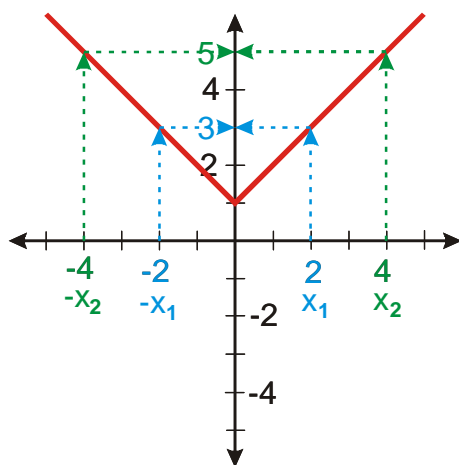


## 2.4.6 Sudé a liché funkce

Předpoklady: 2203, 2402

**Pedagogická poznámka:** Tato hodina patří mezi ty, ve kterých se toho moc nestihne. Pokud si však studenti mají nakreslit obrázky sami, není jiná možnost. Přesto by samotné kreslení grafů nemělo trvat více než 10 minut a nejspíše 15 minut před koncem je třeba začít s příkladem 2.

**Př. 1:** Nakresli vedle sebe grafy funkcí:  $y_1 = |x| + 1$ ,  $y_2 = 2x$ ,  $y_3 = |x + 2|$ . S pomocí nakreslených grafů prozkoumej, jakým způsobem souvisí hodnoty těchto funkcí pro navzájem opačná čísla.



Hodnoty navzájem opačných čísel jsou shodné.

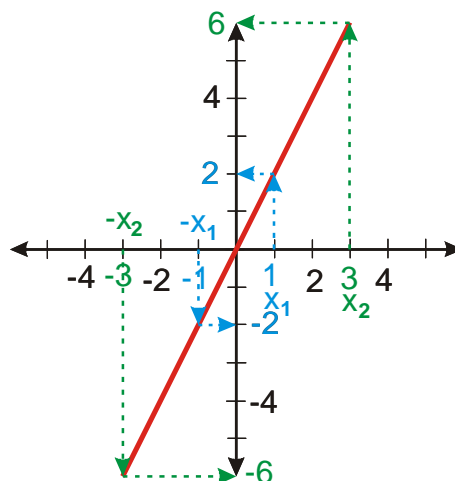
Jde o speciální vlastnost. Jak se jmenuje?

Funkce  $y_1 = |x| + 1$  se nazývá **sudá funkce**.

Graf je souměrný podle osy  $y$ .

Jak sestavit definici? Zapiš vlastnost v první řádce pod grafem pomocí  $f(x)$  a  $f(-x)$ .

$$f(x) = f(-x)$$

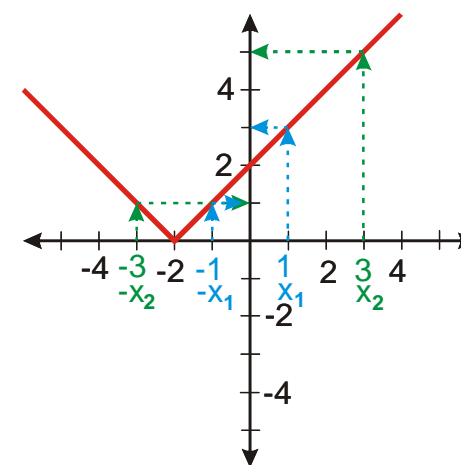


Hodnoty navzájem opačných čísel jsou čísla navzájem opačná.

Funkce  $y_2 = 2x$  se nazývá **lichá funkce**.

Graf je středově souměrný podle počátku (bod  $[0; 0]$ ).

$$f(x) = -f(-x)$$



Mezi hodnotami navzájem opačných čísel není žádný viditelný vztah.

Nemá vlastnost, nemá žádné speciální pojmenování.

Celá definice:

Funkce  $f(x)$  se nazývá sudá, právě když najednou platí: Funkce  $f(x)$  se nazývá lichá, právě když najednou platí:

1) je-li  $x \in D(f)$  je také  $-x \in D(f)$

1) je-li  $x \in D(f)$  je také  $-x \in D(f)$

2) pro každé  $x \in D(f)$  platí  $f(x) = f(-x)$

2) pro každé  $x \in D(f)$  platí  $f(x) = -f(-x)$

Dokaž z definice pro uvedené funkce, že mají uvedené vlastnosti

Bod 1) – jasné  $D(f) = R$ , pro každé  $x$  najdeme číslo

opačné

Bod 2) máme  $x, -x$ , chceme  $f(x) = f(-x)$ .

Dosadíme za  $f(x) = |x| + 1$ ,  $f(-x) = |-x| + 1$ .

Napišeme rovnost a upravujeme než bude zřejmá:

$$f(x) = f(-x)$$

$$f(x) = |x| + 1 = |-x| + 1 = f(-x)$$

$$|x| + 1 = |(-1)x| + 1$$

$$|x| + 1 = |(-1)||x| + 1$$

$$|x| + 1 = 1|x| + 1$$

$$|x| + 1 = 1|x| + 1 \text{ - rovnost platí. } \Rightarrow \text{ funkce je sudá}$$

Bod 1) – jasné  $D(f) = R$ , pro každé  $x$  najdeme číslo

opačné

Bod 2) máme  $x, -x$ , chceme  $f(x) = -f(-x)$ .

Dosadíme za  $f(x) = 2x$ ,  $f(-x) = 2(-x)$ .

Napišeme rovnost a upravujeme než bude zřejmá:

$$f(x) = -f(-x)$$

$$f(x) = 2x = -2(-x) = -f(-x)$$

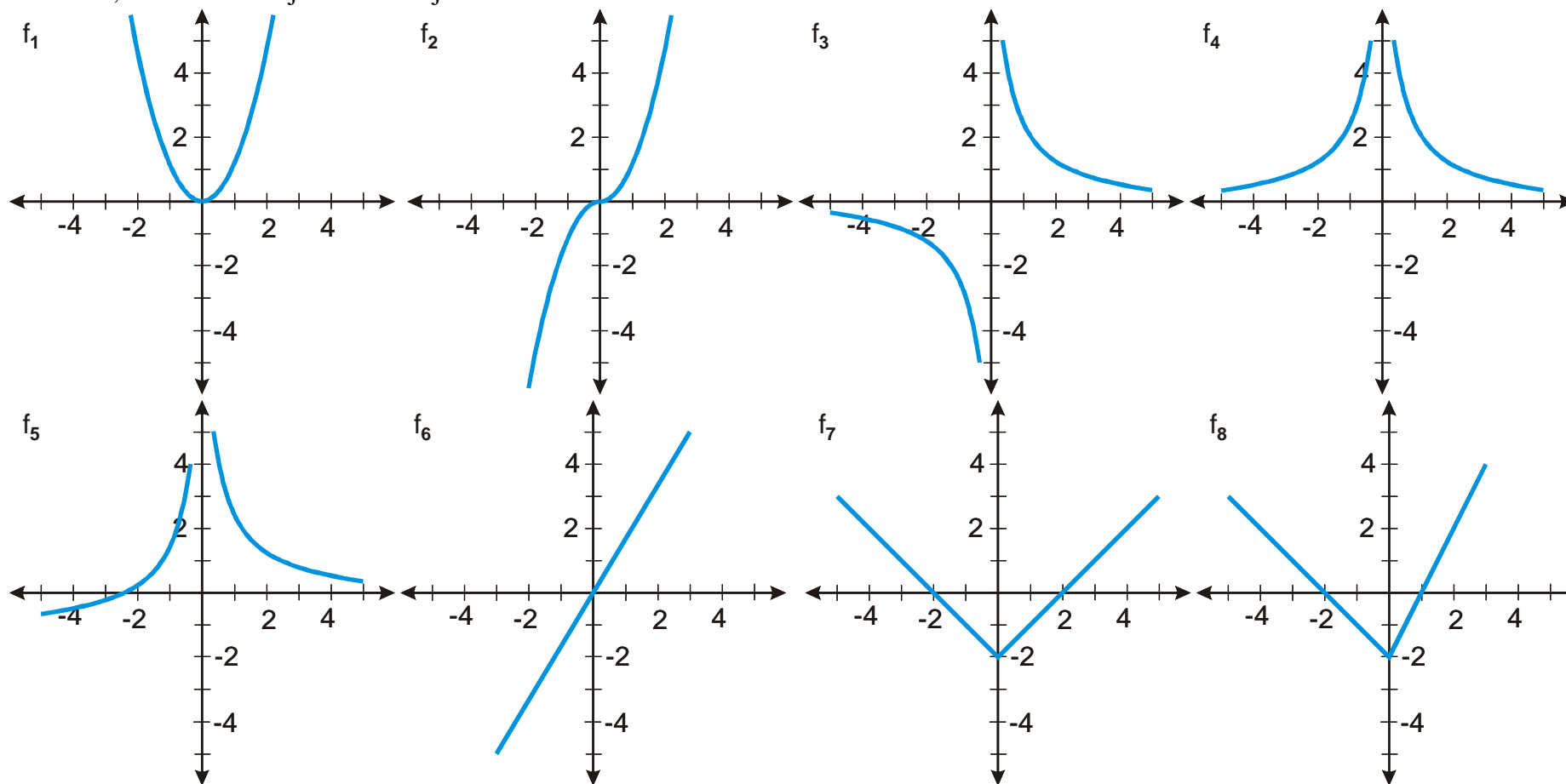
$$2x = -2(-x)$$

$$2x = 2x \text{ - rovnost platí } \Rightarrow \text{ funkce je lichá}$$

Kde se vzalo pojmenování? – Uvidíme, ale logiku to má.

**Pedagogická poznámka:** Nechám studenty namalovat grafy (jejich kreslení je možné pojmut jako zkoušení na znamínka) a snažím se je donutit k tomu, aby začali zkoumat souvislost hodnot opačných čísel. Většinou třídy je však po chvíli nutné ukázat, co si pod tím mají představit. Obě vlastnosti si pojmenujeme, studenti samostatně vymyslí poznávací znamení z grafů. Zápis definice si ukážeme pro lichou funkci, pro sudou ji mají napsat studenti samostatně (pokud si neukážete zápisy rovnosti  $f(x) = -f(-x)$  je tento postup lepší, protože uvedená rovnost je pro studenty dost náročná). Důkaz vlastnosti si ukážeme pro sudou, samostatný důkaz pro lichou funkci zůstává pro dobrovolníky nebo na konec hodiny.

**Př. 2:** Rozhodni, které z následujících funkcí jsou sudé nebo liché.



Sudé jsou funkce:  $f_1; f_4; f_7$ .

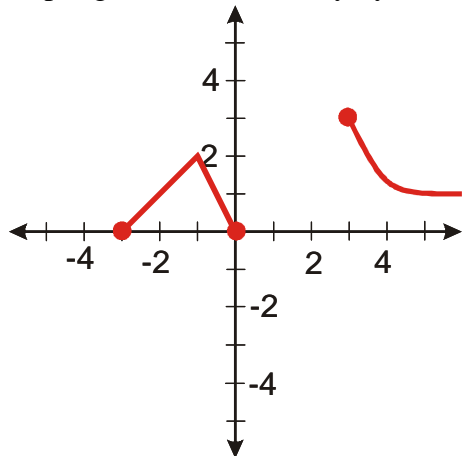
Liché jsou funkce:  $f_2; f_3; f_6$ .

**Pedagogická poznámka:** Při řešení předchozího příkladu chodím po třídě a s některými studenty diskutuji o tom, co je pro jejich obrázek důležité a co by mohli kvůli rychlosti vynechat. Obecně často platí, že ti, kteří by nejvíce potřebovali pracovat samostatně, kreslí všechno velice pečlivě, aby stihli pouze opsat správné řešení z projektoru.

**Př. 3:** Existuje funkce, která je lichá i sudá zároveň?

Ano, jde o funkci  $y = 0$ .

**Př. 4:** Doplň graf funkce tak, aby byla: a) sudá b) lichá.

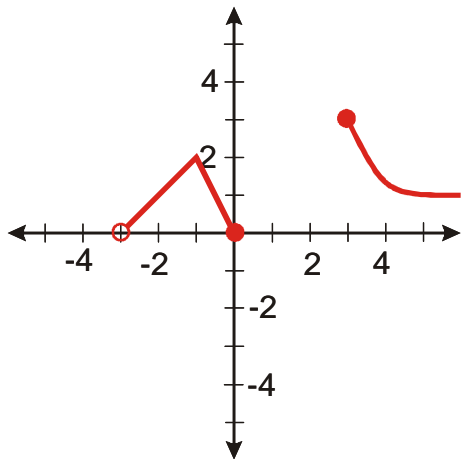


Příklad není možné vyřešit, protože platí  $f(3) = 3$  a zároveň  $f(-3) = 0$ . Graf funkce tedy už nyní nespĺňuje podmínku pro sudost  $f(3) = f(-3)$  ani podmínku pro lichost  $f(3) = -f(-3)$ . Když do grafu přidáme další body na tomto faktu se nic nezmění.

**Pedagogická poznámka:** Určitě není překvapením, že mnoho studentů příklad, který není řešitelný, hravě vyřeší. Další sice mají pocit, že něco není v pořádku, ale jen málo z nich překoná zábrany a ozve se.

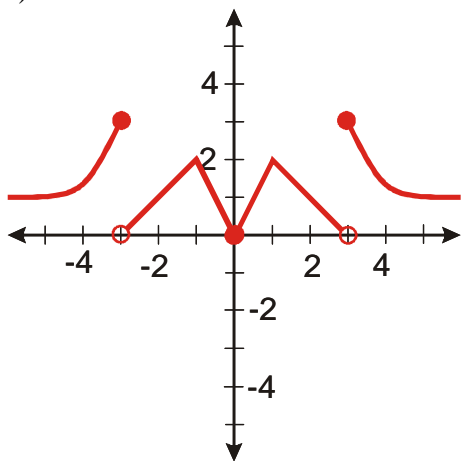
**Př. 5:** Uprav předchozí graf tak, aby byl předchozí úkol splnitelný.

Stačí jeden ze jmenovaných bodů odstranit abychom hodnotu pro opačné  $x$  mohli stanovit tak, jak to vyžaduje odpovídající definice.

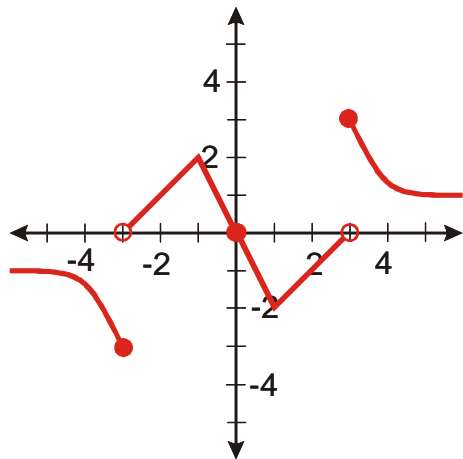


**Př. 6:** Doplň upravený graf funkce tak, aby byla: a) sudá b) lichá.

a) sudá



b) lichá



**Shrnutí:** Funkce, u kterých souvisí hodnoty navzájem opačných čísel, nazýváme sudé (platí  $f(x) = f(-x)$ ) nebo liché (platí  $f(x) = -f(-x)$ ).