2.4.15 Grafy relací s absolutními hodnotami

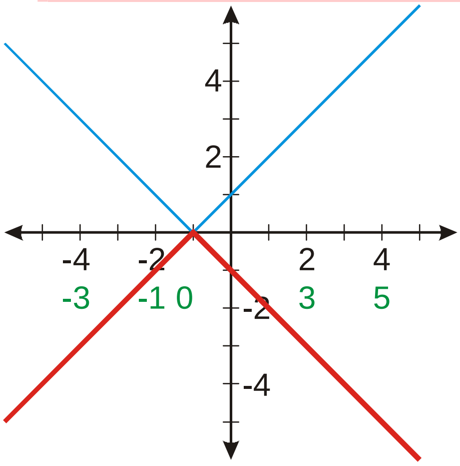
Předpoklady: 2102, 2402, 2403, 2404, 2405, 2412, 2413

Pedagogická poznámka: Tato hodina nepatří do klasických středoškolských osnov. Je reakcí na fakt, že relace s absolutními hodnotami zůstaly jako reziduum starých časů v maturitních otázkách na naší škole. Nezbývá než je studentům ukázat. V případě časového skluzu hodinu vynechávám a proberu až s maturanty těsně před maturitou.
Na druhou stranu je hodina velice hezká v tom, že si studenti mohou ověřit, že použitím pravidel, která znají, mohou vyřešit i poměrně komplikované příklady, značné odlišné od toho, co znají.
Za úspěšné považuji studenty, kteří vyřeší první čtyři příklady. Zbývající dva jsou bonbónkem pro olympioniky.

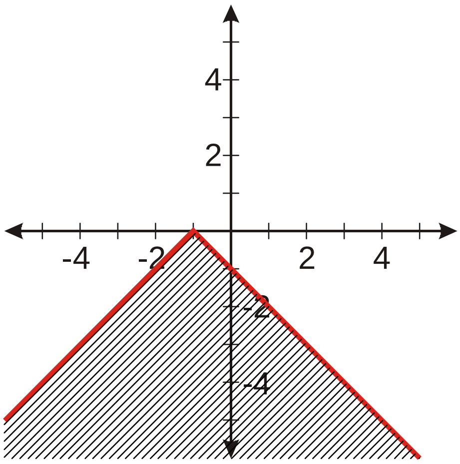
Př. 1: Nakresli graf relace $L_1 = \{[x, y] \in R \times R; y \leq -|x+1|\}$.

Požadovaná relace je podmnožinou kartézského součinu $R \times R$, který je zobrazen soustavou kartézských souřadnic.
Nejdříve nakreslíme graf funkce $y = -|x+1|$, tím získáme hraniční čáru grafu relace L_1, šrafováním pak doplníme graf o body $\{[x, y] \in R \times R; y < -|x+1|\}$
Kreslíme graf funkce $y = -|x+1| = -f(x+1)$. Jako $f(x)$ použijeme funkci $y = |x|$.

Zvolíme x x
Vypočteme $x+1$
Nakreslíme funkci $y = f(x+1) = |x+1|$
Nakreslíme funkci $y = -f(x+1) = -|x+1|$



Graf funkce $y = -|x+1|$ zobrazuje body pro které platí $\{[x, y] \in R \times R; y = -|x+1|\}$, musíme přidat ještě body $\{[x, y] \in R \times R; y < -|x+1|\}$, tedy body jejichž y-ová souřadnice je menší než bodů na grafu funkce. Menší y-ová souřadnice znamená, že bod je níže $\Rightarrow$ vyšrafujeme oblast pod čárou grafu.

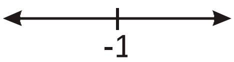


Pedagogická poznámka: Někteří studenti příklad vyřeší bez dalšího komentáře. Jako první nápovědu napíšu na tabuli, že graf funkce $y=-|x+1|$ můžeme napsat jako $L_0=\{[x,y]\in R\times R; y=-|x+1|\}$. Druhou radou je pokyn, aby studenti nakreslili graf funkce $y=-|x+1|$ a pak přemýšleli nad tím, jak se změní hledané body, když přidáme nerovnost.

Př. 2: Nakresli graf relace $L_2=\{[x,y]\in R\times R; y\geq |x+1|-x\}$.

Požadovaná relace je podmnožinou kartézského součinu $R\times R$, který je zobrazen soustavou kartézských souřadnic.
Nejdříve nakreslíme graf funkce $y=|x+1|-x$, tím získáme hraniční čáru grafu relace L_2, šrafováním pak doplníme graf o body $\{[x,y]\in R\times R; y>|x+1|-x\}$

Kreslíme graf funkce $y=|x+1|-x$.
Zjistíme nulový bod absolutní hodnoty:
$|x+1|$: $x=-1$



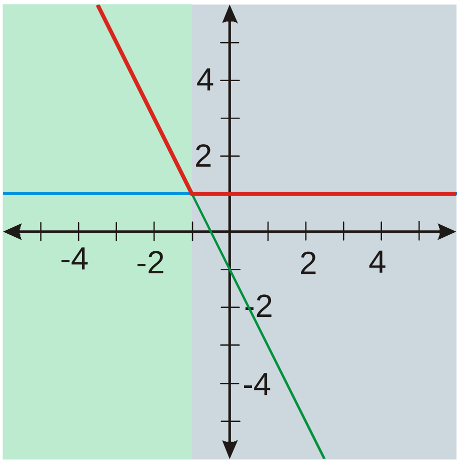
$\Rightarrow$ dva intervaly

1) $x\in(-\infty;-1\rangle$ $\qquad x\leq -1 \Rightarrow |x+1|=-x-1$

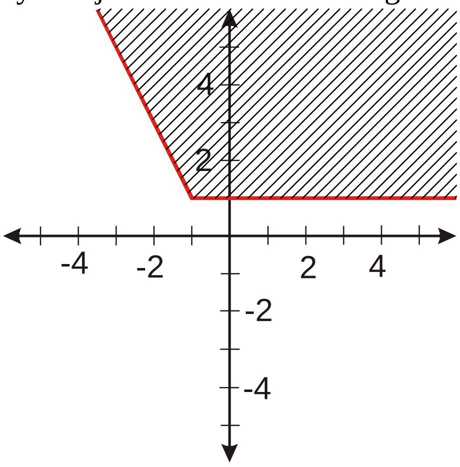
$y=|x+1|-x=-x-1-x=-2x-1$

2) $x\in\langle -1;\infty)$ $\qquad x\geq -1 \Rightarrow |x+1|=x+1$

$y=|x+1|-x=x+1-x=1$



Graf funkce $y = |x+1| - x$ zobrazuje body pro které platí $\{[x, y] \in R \times R; y = |x+1| - x\}$, musíme přidat ještě body $\{[x, y] \in R \times R; y > |x+1| - x\}$, tedy body jejichž *y*-ová souřadnice je větší než bodů na grafu funkce. Větší *y*-ová souřadnice znamená, že bod je výš $\Rightarrow$ vyšrafujeme oblast nad čárou grafu.



Pedagogická poznámka: S druhým příkladem nebývají problémy. Pokud se vyskytnou, týkají se konstrukce grafu funkce $y = |x+1| - x$. Takovým studentům připomínám, že neselhala logika, ale paměť.

Př. 3: Nakresli graf relace $L_3 = \{[x, y] \in R \times R; |y| > |x|\}$.

Požadovaná relace je podmnožinou kartézského součinu , který je zobrazen soustavou kartézských souřadnic.

Problém: Zápis relace obsahuje $|y|$. Graf funkce $y = |x|$ umíme nakreslit ihned $\Rightarrow$ odstraníme absolutní hodnotu *y*, abychom mohli řešit příklad ve dvou krocích.

Zjistíme nulový bod absolutní hodnoty: $|y|: y = 0$

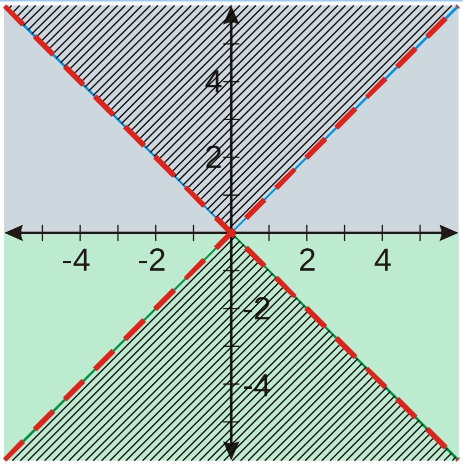
0 $\Rightarrow$ dva intervaly

1) $y \in (-\infty; 0\rangle$ $y \le 0 \Rightarrow |y| = -y$ kreslíme pod osou *x* (zelené pozadí)

$-y > |x| \Rightarrow y < -|x|$ vyšrafujeme oblast pod grafem (*y*-ová souřadnice má být menší)

2) $y \in \langle 0; \infty)$ $y \ge 0 \Rightarrow |y| = y$ kreslíme nad osou *x* (modré pozadí)

$y > |x|$ vyšrafujeme oblast nad grafem (y-ová souřadnice má být větší)



Grafy funkcí $y = |x|$ a $y = -|x|$ jsou vytaženy čárkovaně, protože jejich body do relace nepatří.

Dodatek: Příklad je možné řešit i zpaměti:

$|x|$ je vzdálenost bodu ve směru osy x od počátku (tedy vzdálenost bodu od osy y),

$|y|$ je vzdálenost bodu ve směru osy y od počátku (tedy vzdálenost bodu od osy x)

$\Rightarrow$ $|y| > |x|$ - hledáme body, které jsou od osy x vzdálené více než od osy y.

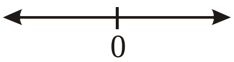
Pedagogická poznámka: Hodně se snažím o to, aby si studenti při odstraňování $|y|$ uvědomovali, že jde o naprosto stejný postup jako při odstraňování $|x|$.

Někteří studenti mají potíže se smířit s tím, že v horní polovině se graf chová jinak než v dolní. Doporučuji jim vzít si dva konkrétní body a ověřit si s jejich pomocí, že graf je v horní i spodní polovině vyšrafován správně.

Př. 4: Nakresli graf relace $L_4 = \{[x, y] \in R \times R; |x-1| + |y| \geq 4\}$.

Příklad vypadá složitěji než předchozí. Přepíšeme si podmínku do tvaru, který je podobnější tomu, co jsme dosud řešili: $|x-1| + |y| \geq 4$ $\Rightarrow$ $|y| \geq 4 - |x-1|$ $\Rightarrow$ fakticky stejný příklad jako předchozí $\Rightarrow$ odstraníme $|y|$ stejně jako v předchozím příkladu.

Zjistíme nulový bod absolutní hodnoty: $|y|$: $y = 0$



$\Rightarrow$ dva intervaly

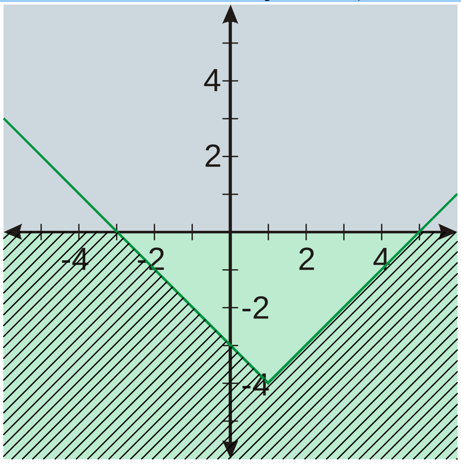
1) $y \in (-\infty; 0)$ $\quad$ $y \leq 0 \Rightarrow |y| = -y$ $\quad$ kreslíme pod osou x (zelené pozadí)

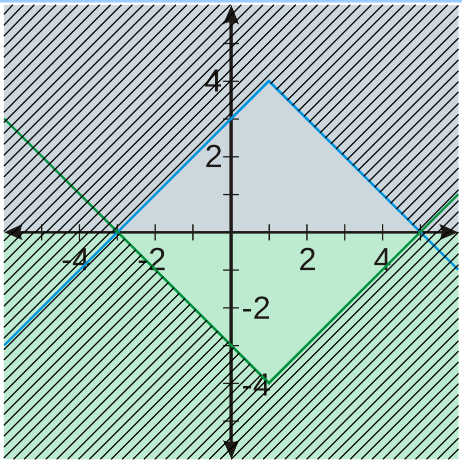
$-y \geq 4 - |x-1| \quad / \cdot (-1)$

$y \leq |x-1| - 4$ $\quad$ vyšrafujeme oblast pod grafem funkce $y = |x-1| - 4$ (y-ová souřadnice má být menší nebo rovna)

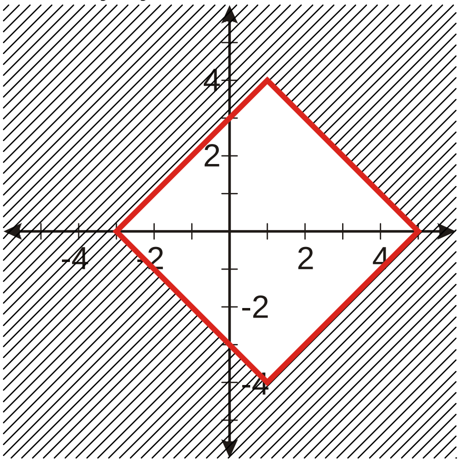
2) $y \in \langle 0; \infty)$ $\quad$ $y \geq 0 \Rightarrow |y| = y$ $\quad$ kreslíme nad osou x (modré pozadí)

$y \geq 4-|x-1| = -|x-1|+4$ vyšrafujeme oblast nad grafem funkce $y=-|x-1|+4$ (y-ová souřadnice má být větší)





Konečný výsledek:



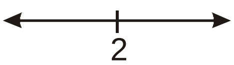
Př. 5: Nakresli graf relace $L_5 = \{[x,y] \in R \times R; |x+1| + 2|y-2| \leq 4\}$. Ještě před začátkem řešení odhadni výsledek.

Odhad výsledku:
Srovnáme aktuální a předchozí předpis: $|x+1|+2|y-2| \leq 4$ a $|x-1|+|y| \geq 4 \Rightarrow$ opět půjde o kosočtverec, se středem v bodě $[-1;2]$, který bude mít vyšrafovaný vnitřek. Kosočtverec bude širší než vyšší.

Přepíšeme si podmínku do tvaru, který je podobnější tomu, co jsme dosud řešili:
$|x+1|+2|y-2| \leq 4 \Rightarrow 2|y-2| \leq 4-|x+1|$

$|y-2| \leq 2-\frac{1}{2}|x+1| \Rightarrow$ fakticky stejný příklad jako předchozí $\Rightarrow$ odstraníme $|y-2|$ stejně jako v předchozím příkladu $|y|$.

Zjistíme nulový bod absolutní hodnoty: $|y-2|$: $y=2$



$\Rightarrow$ dva intervaly

1) $y \in (-\infty;2\rangle$ $y-2 \leq 0 \Rightarrow |y-2| = -y+2$ kreslíme pod přímkou $y=2$ (zelené pozadí)

$-y+2 \le 2-\frac{1}{2}|x+1|$

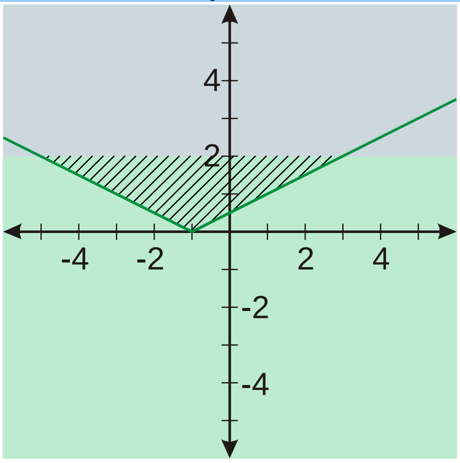
$-y \le -\frac{1}{2}|x+1| \quad / \cdot (-1)$

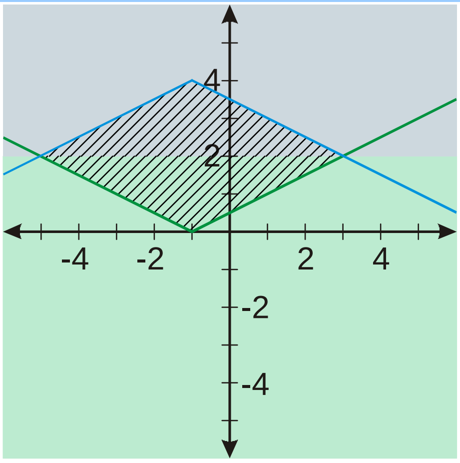
$y \ge \frac{1}{2}|x+1|$ vyšrafujeme oblast nad grafem funkce $y=\frac{1}{2}|x+1|$ (y-ová souřadnice má být větší nebo rovna)

2) $y \in \langle 2;\infty)$ $y-2 \ge 0 \Rightarrow |y-2| = y-2$ kreslíme nad přímkou $y=2$ (modré pozadí)

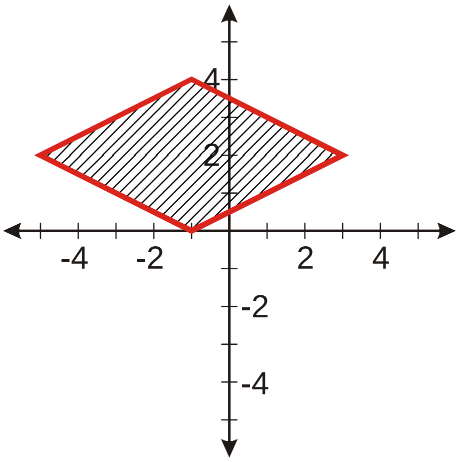
$y-2 \le 2-\frac{1}{2}|x+1|$

$y \le 4-\frac{1}{2}|x+1|$ vyšrafujeme oblast pod grafem funkce $y \le 4-\frac{1}{2}|x+1|$ (y-ová souřadnice má být menší nebo rovna)





Konečný výsledek:

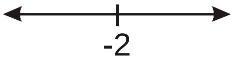


Př. 6: Nakresli graf relace $L_6 = \{[x,y] \in R \times R; |y-1| + y + |x+2| - 2x - 7 \ge 0\}$.

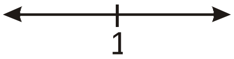
Předpis obsahuje absolutní hodnotu s x i y, stejně tak obě neznámé mimo absolutní hodnotu $\Rightarrow$ musíme rozdělit intervaly u obou proměnných.

Zjistíme nulové bod absolutních hodnot:

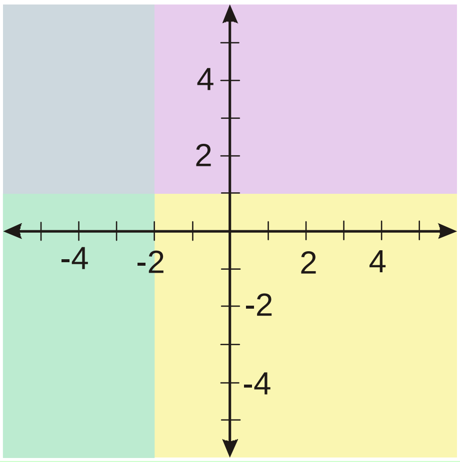
$|x+2|$: $x=-2$



$|y-1|$: $y=1$



$\Rightarrow$ čtyři kombinace $\Rightarrow$
plocha grafu se rozpadne na čtyři části

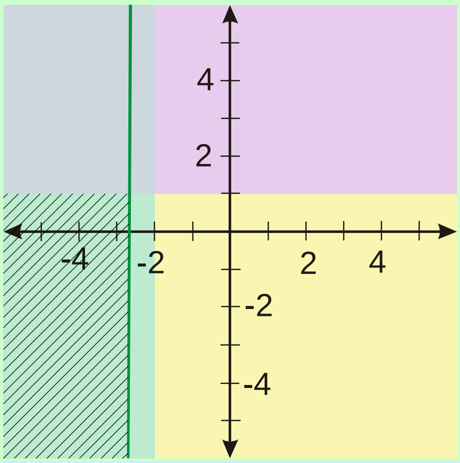


1) $x \in (-\infty;-2\rangle \wedge y \in (-\infty;1\rangle$ $\quad x \le -2 \Rightarrow |x+2| = -x-2 \quad y \le 1 \Rightarrow |y-1| = -y+1$

$|y-1| + y + |x+2| - 2x - 7 = -y+1+y-x-2-2x-7 \ge 0$

$-8 \ge 3x$

$x \le -\dfrac{8}{3}$



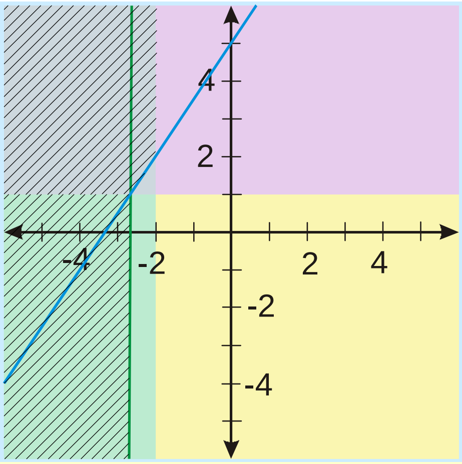
2) $x \in (-\infty;-2\rangle \wedge y \in \langle 1;\infty)$ $\quad x \le -2 \Rightarrow |x+2| = -x-2 \quad y \ge 1 \Rightarrow |y-1| = y-1$

$|y-1| + y + |x+2| - 2x - 7 = y-1+y-x-2-2x-7 \ge 0$

$2y - 3x - 10 \ge 0$

$2y \ge 3x + 10$

$y \ge \dfrac{3}{2}x + 5$

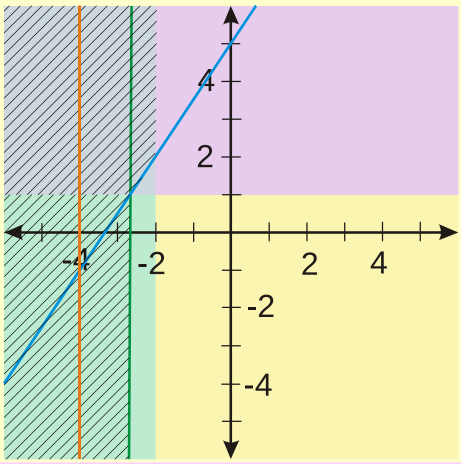


3) $x \in \langle -2; \infty) \wedge y \in (-\infty; 1\rangle$ $\quad x \geq -2 \Rightarrow |x+2| = x+2$ $\quad y \leq 1 \Rightarrow |y-1| = -y+1$

$|y-1| + y + |x+2| - 2x - 7 = -y + 1 + y + x + 2 - 2x - 7 \geq 0$

$-x - 4 \geq 0$

$x \leq -4$



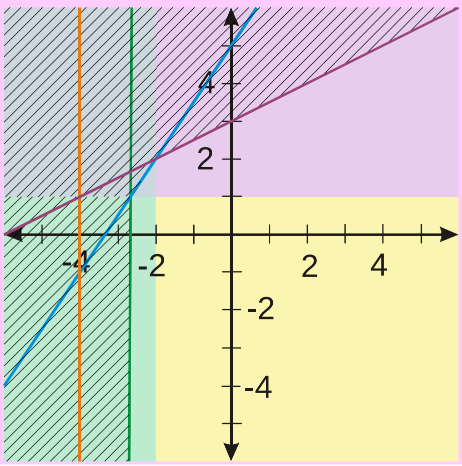
4) $x \in \langle -2; \infty) \wedge y \in \langle 1; \infty)$ $\quad x \geq -2 \Rightarrow |x+2| = x+2$ $\quad y \geq 1 \Rightarrow |y-1| = y-1$

$|y-1| + y + |x+2| - 2x - 7 = y - 1 + y + x + 2 - 2x - 7 \geq 0$

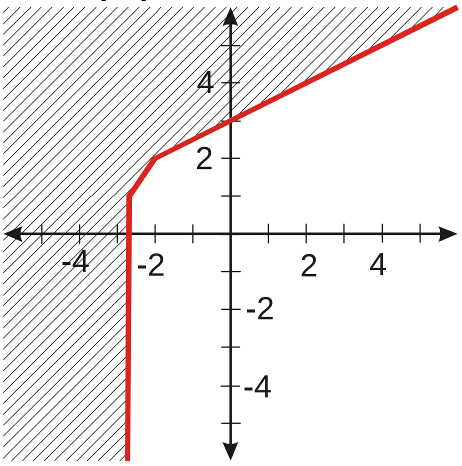
$2y - x - 6 \geq 0$

$2y \geq x + 6$

$y \geq \frac{x}{2} + 3$



Konečný výsledek:



Shrnutí: Pokud umíme nakreslit grafy funkcí, je možné kreslit i grafy relací, které se pomocí funkcí vyjadřují.