

## 2.4.15 Kreslení grafů konkrétních funkcí II

Předpoklady: 020414

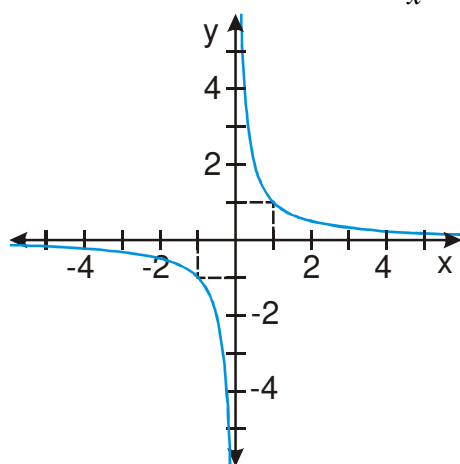
**Shrnutí předchozích hodin:**

**Graf libovolné variace funkce  $f(x)$  nakreslíme tak, že předpis funkce rozdělíme na jednotlivé kroky. Výpočty uvnitř závorky značí funkci (v případě funkce  $y = 2f(|x|-1)$  jde o výraz  $|x|-1$ ) se týkají hodnot proměnné  $x$  před dosazením do funkce a mění hodnoty na ose  $x$ . Podle těchto upravených hodnot pak nakreslíme graf funkce  $f(x)$ . Výpočty vně závorky značí funkci (v případě funkce  $y = 2f(|x|-1)$  jde o násobení  $f(|x|-1)$  dvěma) se týkají již nakresleného grafu funkce a různě ho mění (podle typu výpočtu).**

**Nic víc nepotřebujeme. Pamatovat si, co s grafem provádějí jednotlivé druhy výpočtu je nesmysl.**

**Protože nezáleží na základním obrázku funkce  $f(x)$ , můžeme metodu aplikovat na kreslení grafu libovolné funkce.**

**Př. 1:** Na obrázku je graf funkce  $y = \frac{1}{x}$ .



Vyčti z grafu o funkci co nejvíce informací.

Funkce  $y = \frac{1}{x}$ :

- má hodnotu pro všechna reálná čísla kromě nuly,
- není ani shora ani zdola omezená,
- klesá v intervalu  $(-\infty; 0)$  i v intervalu  $(0; \infty)$ ,
- prochází bodem  $[-1; -1]$  a bodem  $[1; 1]$ ,
- pro  $x$ , které jdou k nekonečnu, se hodnoty blíží k nule (z kladných čísel),
- pro  $x$ , které jdou k minus nekonečnu, se hodnoty blíží k nule (ze záporných čísel),
- když se  $x$  blíží k nule z kladných čísel, hodnoty se blíží k nekonečnu,

- když se  $x$  blíží k nule ze záporných čísel, hodnoty se blíží k mínus nekonečnu,
- je lichá.

Osy  $x$  a  $y$ , ke kterým se graf přimyká se označují jako asymptoty. Pokud kreslíme graf v posunuté poloze, kreslíme nejdříve posunuté asymptoty, a teprve poté vlastní čáru grafu, která se k nim přimyká.

**Př. 2:** Nakresli graf funkce  $y = \frac{1}{x-2} - 1$ .

Přepíšeme pomocí zápisu  $y = f(x)$ :  $y = \frac{1}{x-2} - 1 = f(x-2) - 1$ .

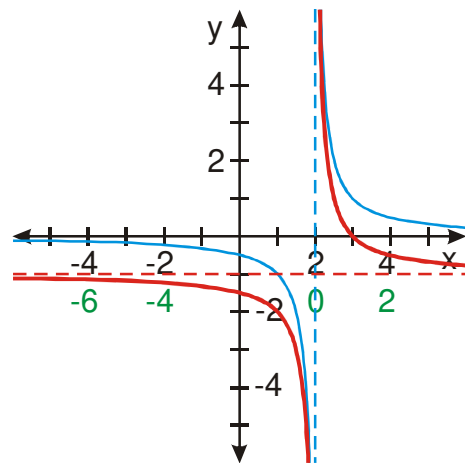
Zvolíme  $x$ .

Vypočteme  $x-2$ .

Nakreslíme funkci  $y = f(x-2) = \frac{1}{x-2}$ .

Nakreslíme funkci  $y = f(x-2) - 1 = \frac{1}{x-2} - 1$ .

Jako funkci  $y = f(x)$  použijeme  $y = \frac{1}{x}$ .



**Př. 3:** Nakresli grafu funkce  $y = -\frac{2}{x} + 1$ .

Přepíšeme pomocí zápisu  $y = f(x)$ :  $y = -\frac{2}{x} + 1 = -2f(x) + 1$ .

Zvolíme  $x$ .

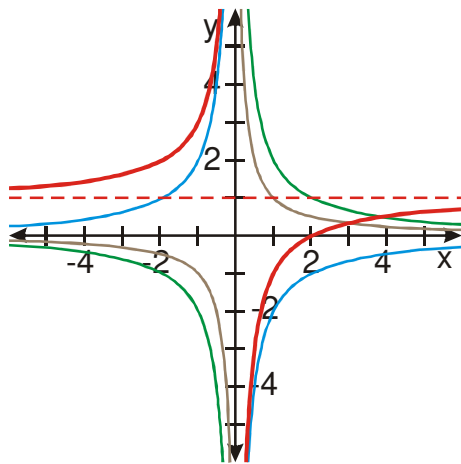
Nakreslíme funkci:  $f(x)$ .

Nakreslíme funkci:  $y = 2f(x) = \frac{2}{x}$ .

Nakreslíme funkci  $y = -2f(x) = -\frac{2}{x}$ .

Nakreslíme funkci  $y = -2f(x) + 1 = -\frac{2}{x} + 1$ .

Jako funkci  $y = f(x)$  použijeme  $y = \frac{1}{x}$ .



**Př. 4:** Nakresli graf funkce  $y = \left| \frac{1}{x+2} - 1 \right|$ ,

Přepíšeme pomocí zápisu  $y = f(x)$ :  $y = \left| \frac{1}{x+2} - 1 \right| = |f(x+2) - 1|$ .

Zvolíme  $x$ .

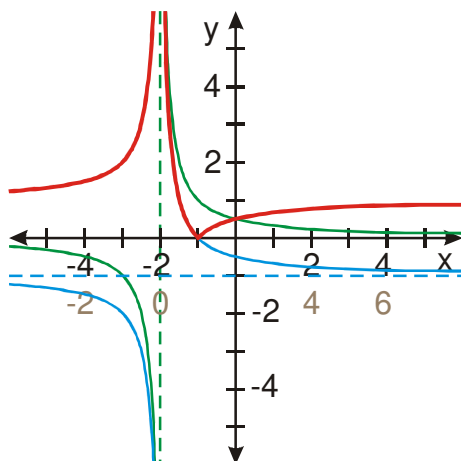
Vypočteme:  $x+2$ .

Nakreslíme funkci:  $y = f(x+2) = \frac{1}{x+2}$ .

Nakreslíme funkci  $y = f(x+2) - 1 = \frac{1}{x+2} - 1$ .

Nakreslíme funkci  $y = |f(x+2) - 1| = \left| \frac{1}{x+2} - 1 \right|$ .

Jako funkci  $y = f(x)$  použijeme  $y = \frac{1}{x}$ .



**Př. 5:** Nakresli graf funkce  $y = \left| \frac{1}{|x|-1} - 1 \right|$

Přepíšeme pomocí zápisu  $y = f(x)$ :  $y = \left| \frac{1}{|x|-1} - 1 \right| = |f(|x|-1) - 1|$ .

Zvolíme  $x$ .

Vypočteme:  $|x|$ .

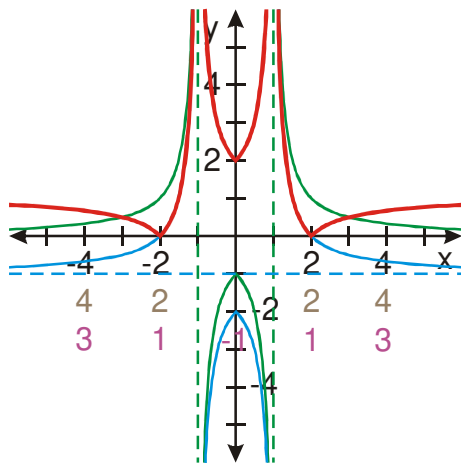
Vypočteme:  $|x|-1$

Nakreslíme funkci:  $y = f(|x|-1) = \frac{1}{|x|-1}$ .

Nakreslíme funkci  $y = f(|x|-1) - 1 = \frac{1}{|x|-1} - 1$ .

Nakreslíme funkci  $y = |f(|x|-1) - 1| = \left| \frac{1}{|x|-1} - 1 \right|$ .

Jako funkci  $y = f(x)$  použijeme  $y = \frac{1}{x}$ .



Jako příklad zkusíme  $y = |x| = f(x) \Rightarrow$

- v zápisu místo obecného  $f(\quad)$ , píšeme konkrétní  $|\quad|$
- v grafech místo nějakého obrázku, kreslíme konkrétní graf funkce  $y = |x|$  ve tvaru písmena V.

**Př. 6:** Nakresli graf funkce  $y = |x+2|-1$ .

Přepíšeme pomocí zápisu  $y = f(x)$ :  $y = |x+2|-1 = f(x+2)-1$ .

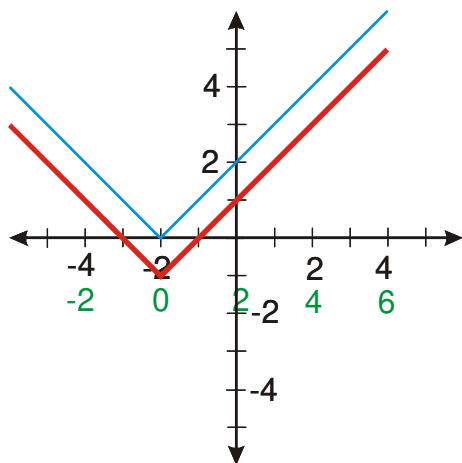
Zvolíme  $x$ .

Vypočteme  $x+2$ .

Nakreslíme funkci  $y = f(x+2) = |x+2|$ .

Nakreslíme funkci  $y = f(x+2)-1 = |x+2|-1$ .

Jako funkci  $y = f(x)$  použijeme  $y = |x|$ .



**Pedagogická poznámka:** Většina studentů potřebuje pomoci zejména s přepisem z konkrétního zadání do zadání pomocí  $f(x)$ . Snažím se z toho nedělat vědu, opravdu jde jen o to, že rovné závorky absolutní hodnoty nahradíme normálními, před které napíšeme  $f$ .

**Př. 7:** Nakresli graf funkce  $y = \frac{1}{2}|x-1|+1$ .

Přepíšeme pomocí zápisu  $y = f(x)$ :  $y = \frac{1}{2}|x-1|+1 = \frac{1}{2}f(x-1)+1$ .

Zvolíme  $x$ .

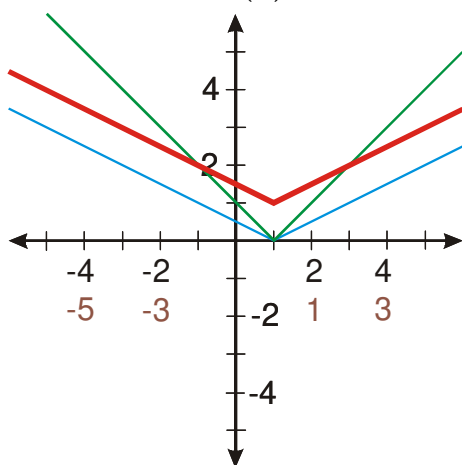
Vypočteme  $x-1$ .

Nakreslíme funkci:  $y = f(x-1) = |x-1|$ .

Nakreslíme funkci  $y = \frac{1}{2}f(x-1) = \frac{1}{2}|x-1|$ .

Nakreslíme funkci  $y = \frac{1}{2}f(x-1)+1 = \frac{1}{2}|x-1|+1$ .

Jako funkci  $y = f(x)$  použijeme  $y = |x|$ .



**Pedagogická poznámka:** V tomto příkladě by již měli být všichni schopni přepsat konkrétní zadání na obecné samostatně.

**Př. 8:** Nakresli graf funkce  $y = \left| \frac{1}{2}x - 1 \right| - 2$ .

Přepíšeme pomocí zápisu  $y = f(x)$ :  $y = \left| \frac{1}{2}x - 1 \right| - 2 = f\left(\frac{1}{2}x - 1\right) - 2$

Zvolíme  $x$ .

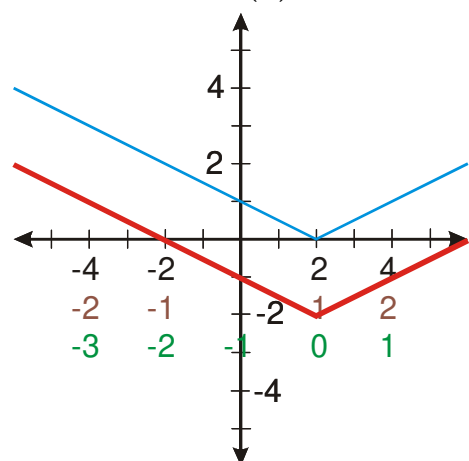
Vypočteme  $\frac{1}{2}x$ .

Vypočteme  $\frac{1}{2}x - 1$ .

Nakreslíme funkci  $y = f\left(\frac{1}{2}x - 1\right) = \left| \frac{1}{2}x - 1 \right|$ .

Nakreslíme funkci  $y = f\left(\frac{1}{2}x - 1\right) - 2 = \left| \frac{1}{2}x - 1 \right| - 2$ .

Jako funkci  $y = f(x)$  použijeme  $y = |x|$ .



**Pedagogická poznámka:** V předchozím příkladu se objevuje poměrně dost chyb, které v naprosté většině pramení z příliš rychlého přepisování osy. Porovnáváme si výsledek s předchozím příkladem, pokud nakreslí špatně posunutý graf (s vrcholem pro  $x = 1$ ) větší množství studentů, opět si připomínáme, že správné umístění vrcholu si můžeme zkontrolovat pomocí nulové hodnoty vnitřku absolutní hodnoty.

**Př. 9:** Předpis funkce  $y = |2|x+1| - 2| - 1$  můžeme pomocí funkce  $f(\ ) = | \ |$  přepsat dvěma způsoby. Najdi oba způsoby, sestroj s jejich pomocí graf a porovnej oba výsledky.

Předpis funkce  $y = |2|x+1| - 2| - 1$  obsahuje dvě do sebe vnořené absolutní hodnoty.

Libovolnou z nich můžeme nahradit pomocí přepisu  $f(\ ) = | \ | \Rightarrow$  dvě varianty:

- $y = y = |2|x+1| - 2| - 1 = |2f(x+1) - 2| - 1$ ,

- $y = y = |2|x+1|-2|-1 = f(2|x+1|-2) - 1$ .

Přepíšeme pomocí zápisu  $y = f(x)$ :  $y = y = |2|x+1|-2|-1 = |2f(x+1)-2|-1$

Zvolíme  $x$ .

Vypočteme  $x+1$ .

Nakreslíme funkci  $y = f(x+1) = |x+1|$ .

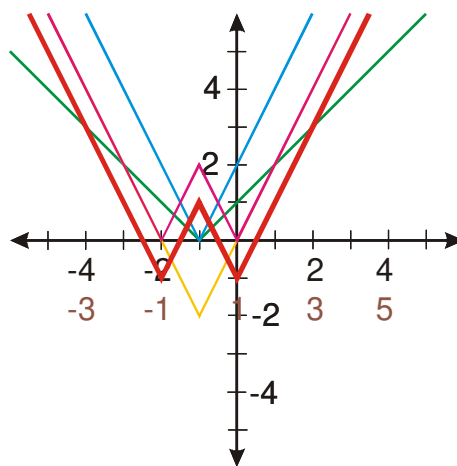
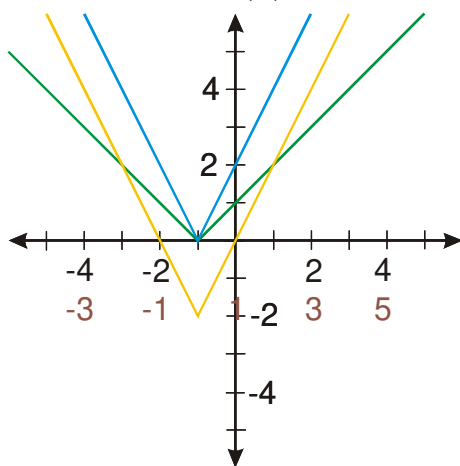
Nakreslíme funkci  $y = 2f(x+1) = 2|x+1|$ .

Nakreslíme funkci  $y = 2f(x+1) - 2 = 2|x+1| - 2$ .

Nakreslíme funkci  $y = |2f(x+1) - 2| = |2|x+1| - 2|$ .

Nakreslíme funkci  $y = |2f(x+1) - 2| - 1 = |2|x+1| - 2| - 1$ .

Jako funkci  $y = f(x)$  použijeme  $y = |x|$ .



Přepíšeme pomocí zápisu  $y = f(x)$ :  $y = y = |2|x+1|-2|-1 = f(2|x+1|-2) - 1$

Zvolíme  $x$ .

Vypočteme  $x+1$ .

Vypočteme  $|x+1|$ .

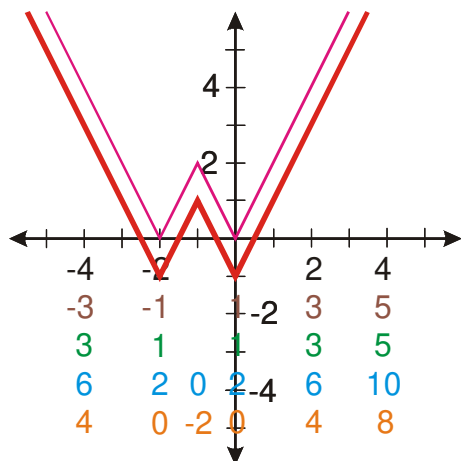
Vypočteme  $2|x+1|$ .

Vypočteme  $2|x+1| - 2$ .

Nakreslíme funkci  $y = |2f(x+1) - 2| = |2|x+1| - 2|$ .

Nakreslíme funkci  $y = |2f(x+1) - 2| - 1 = |2|x+1| - 2| - 1$ .

Jako funkci  $y = f(x)$  použijeme  $y = |x|$ .



Oběma postupy jsme získali stejný výsledek.

Je zřejmé, že nakreslit graf jakékoliv další funkce pro nás v budoucnosti nebude problém.

Jaké další znalosti budeme potřebovat?

- úpravy rovnic
- úpravy nerovnic, obracení znaménka
- součinnové tvary
- úpravy výrazů, vytýkání
- orientace v grafech
- odstraňování absolutní hodnoty (ve funkcích, rovnicích i nerovnicích).

K těmto poznatkům pak schopnost experimentovat, pracovat postupně a držet si přehled, kontrolovat průběžně smysl vlastního počítání.

K těmto několika základním postupům už toho moc nepřidáme, ale dotáhneme to opravdu docela daleko.

**Shrnutí:** Náš postup pro kreslení funkcí je možné použít na libovolnou i „neznámou“ funkci.