

2.5.1 Kvadratická funkce

Předpoklady: 2414

Pedagogická poznámka: Velká většina studentů zvládne hodinu zcela samostatně. Snažím se nezapomenout je pochválit.

Slovo kvadratická už známe, začínali jsme s kvadratickou rovnicí $ax^2 + bx + c = 0$.
Jaký bude předpis kvadratické funkce?

Kvadratická funkce $y = ax^2 + bx + c$, podmínka $a \neq 0$ (aby nezmizelo x^2)

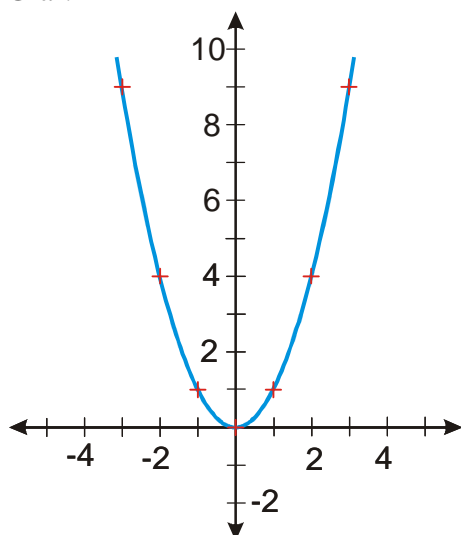
Nejjednodušší kvadratická funkce $y = x^2$ (zmizí všechno kromě x^2).

Pedagogická poznámka: Tabulku si vyplňují studenti samostatně. Doručím cca 7 sloupců, do kterých mají podle svého uvážení zvolit hodnoty x . Tento krok je třeba kontrolovat, protože většina z nich zapomíná na záporná čísla, naopak pak počítá nesmyslně velké hodnoty x .
Bohužel se stále objevuje $x = -2$, $y = -4$. Když se zeptáte, zjistíte, že jde většinou o špatně zadaný výpočet na kalkulačce. V takovém případě, je třeba vysvětlit, jak se má tento výraz zadat správně (pomocí závorek), protože kalkulačce věří žáci více než Vám.

Jak vypadá graf? Tabulka hodnot:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Graf:



Nakreslené křivce říkáme **parabola** (už jsme o ní slyšeli ve fyzice).

Př. 1: Urči z grafu vlastnosti kvadratické funkce ($D(f)$, $H(f)$, minimum, maximum, zda je rostoucí, klesající, sudost, lichost, omezenost ...). Jak se v grafu projevuje

skutečnost, že hodnoty y nerostou rovnoměrně (jako u lineární funkce), ale rychlost jejich růstu se zvyšuje s rostoucím x (když se x změní z 0 na 1, vyroste y o 1 z 0 na 1, když se x změní z 2 na 3 (opět o 1), vyroste y o 5 ze 4 na 9).

$D(f) = \mathbb{R}$ (dokážeme spočítat x^2 pro všechna reálná čísla)

$H(f) = \langle 0, \infty \rangle$ - z výrazu x^2 nikdy nevyjde záporné číslo

klesající $x \in \langle -\infty, 0 \rangle$ rostoucí $x \in \langle 0, \infty \rangle$

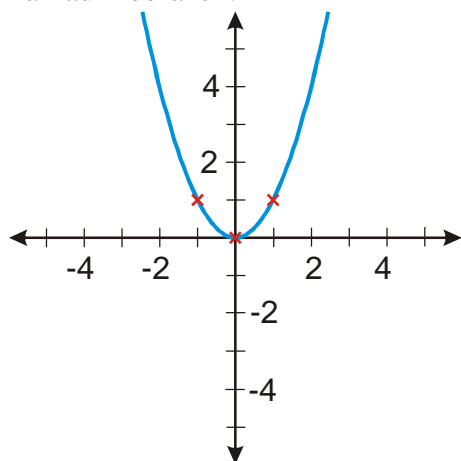
má minimum $[0; 0]$ \Rightarrow je zdola omezená

souměrná podle osy $y \Rightarrow$ je sudá (platí $(-x)^2 = (-1)^2(x)^2 = x^2$, tedy platí $f(x) = f(-x)$)

Pedagogická poznámka: Připomeňte studentům, že jediné co se ohledně vlastností kvadratické funkce musejí naučit, je tvar grafu. Všechno ostatní snadno zjistí z něj, stejně jako v předchozím příkladě.

Teď můžeme kreslit grafy dalších kvadratických funkcí. Budeme používat $f(x) = (x)^2$.

Základní obrázek:



Pedagogická poznámka: Studenti nemají s kreslením grafů problémy. Jediné co je nutné kontrolovat je přepis funkce do tvaru s $f(x)$. Často se stává, že chyby dělají Ti, kteří přepis přeskočí a rovnou kreslí. Pak chci, aby si přepis napsali a většinou se rychle opraví sami.

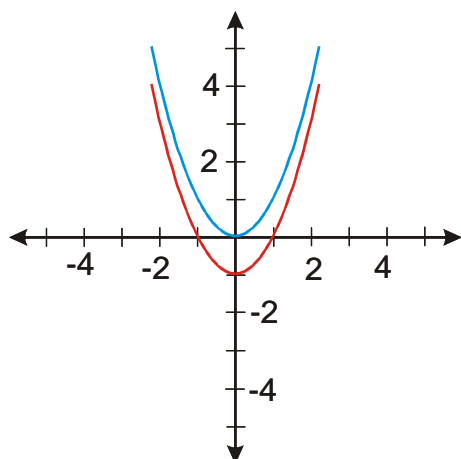
Př. 2: Nakreslete graf funkce $y = x^2 - 1$.

Platí: $y = x^2 - 1 = f(x) - 1$

Zvolíme x

Nakreslíme funkci $y = f(x) = x^2$

Nakreslíme funkci $y = f(x) - 1 = x^2 - 1$



Př. 3: Nakreslete graf funkce $y = -x^2 + 1$

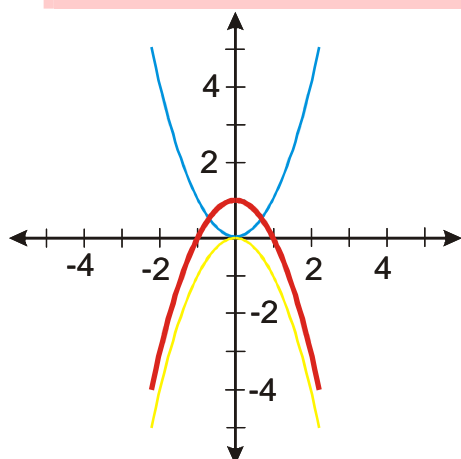
Platí: $y = -x^2 + 1 = -f(x) + 1$

Zvolíme x

Nakreslíme funkci $y = f(x) = x^2$

Nakreslíme funkci $y = -f(x) = -x^2$

Nakreslíme funkci $y = -f(x) + 1 = -x^2 + 1$



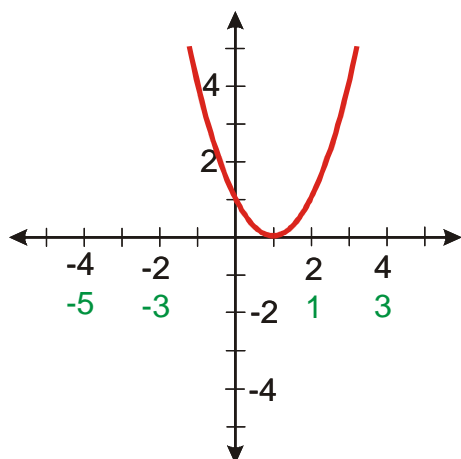
Př. 4: Nakreslete graf funkce $y = (x-1)^2$.

Platí: $y = (x-1)^2 = f(x-1)$

Zvolíme x

Vypočteme $x-1$

Nakreslíme funkci $y = f(x-1) = (x-1)^2$



Pedagogická poznámka: Přepis předchozí funkce je asi největším problémem hodiny. Občas se vyskytuje $y = (x-1)^2 = f(x-1)^2$. V takovém případě, je studentům nutné znovu ukázat $f(x) = (x)^2$, tedy že právě umocňování je tím, co jsme si pojmenovali $f(\quad)$.

Př. 5: Nakreslete graf funkce $y = (x+1)^2 - 2$.

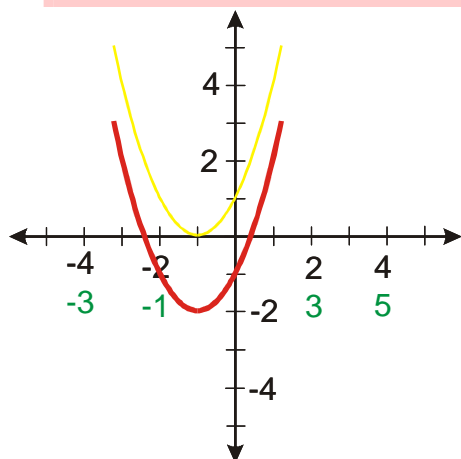
Platí: $y = (x+1)^2 - 2 = f(x+1) - 2$

Zvolíme x

Vypočteme $x+1$

Nakreslíme funkci $y = f(x+1) = (x+1)^2$

Nakreslíme funkci $y = f(x+1) - 2 = (x+1)^2 - 2$



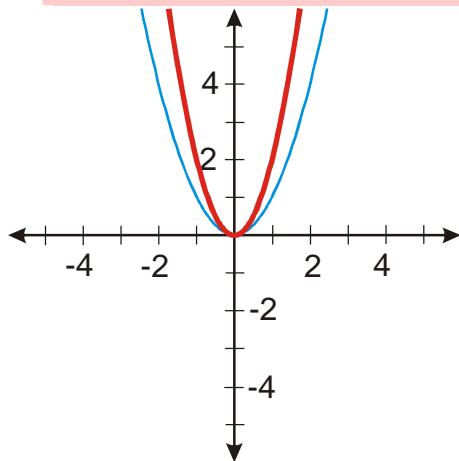
Př. 6: Nakreslete graf funkce $y = 2x^2$.

Platí: $y = 2x^2 = 2f(x)$

Zvolíme x

Nakreslíme funkci $y = f(x) = x^2$

Nakreslíme funkci $y = 2f(x) = 2x^2$



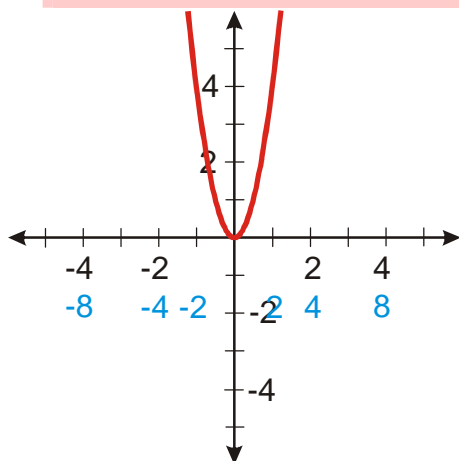
Př. 7: Nakreslete graf funkce $y = (2x)^2$.

Platí: $y = (2x)^2 = f(2x)$

Zvolíme x

Spočteme: $2x$

Nakreslíme funkci $y = f(2x) = (2x)^2$



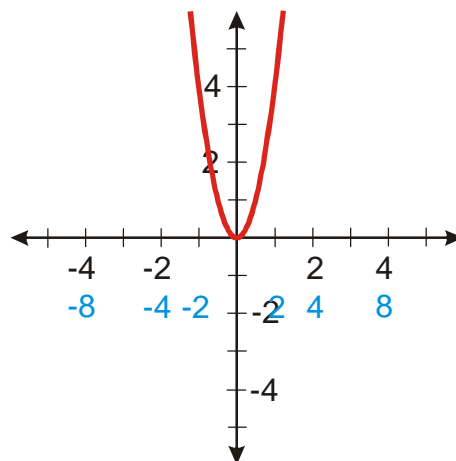
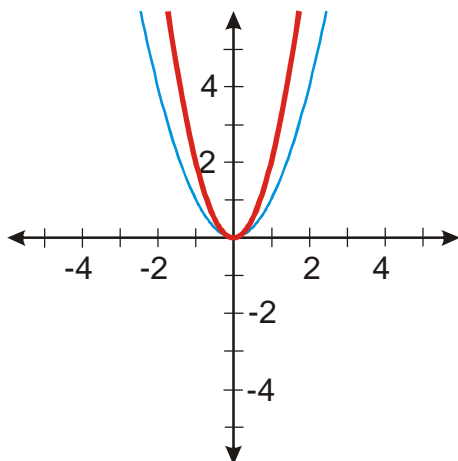
Pedagogická poznámka: Pro porovnání dvou předchozích výsledků je potřeba, aby studenti dobře nakreslili polohu bodů, které odpovídají bodům $[1;1]$ a $[-1;1]$ u funkce $y = x^2$. Pokud není jejich poloha dobře vidět, chci, aby nakreslili grafy lépe.

Př. 8: Porovnej grafy funkcí $y = 2x^2$ a $y = (2x)^2$. Proč nejsou oba grafy stejné?

Nakreslíme si grafy vedle sebe:

$$y = 2x^2$$

$$y = (2x)^2$$



Oba grafy jsou natažené ve svislém směru, ale graf funkce $y = (2x)^2$ dvakrát více. Důvodem je, že nemají stejný předpis funkce, závorka hraje velkou roli, protože umocňujeme i dvojku před x :

$y = (2x)^2 = 2^2 x^2 = 4x^2$ - a to je důvod proč pro stejné hodnoty x má funkce $y = (2x)^2$ dvakrát větší hodnotu než funkce $y = 2x^2$.

Dodatek: Předchozí výpočet je možné použít i pro „definici“ paraboly. Parabola je taková křivka, u které platí, že natažením na čtyřnásobek ve svislém směru získáme stejnou křivku jako smrsknutím ve vodorovném na polovinu.

Př. 9: Nakresli graf funkce $y = 0,5(x-1)^2 + 2$.

Platí: $y = 0,5(x-1)^2 + 2 = 0,5 \cdot f(x-1) + 2$

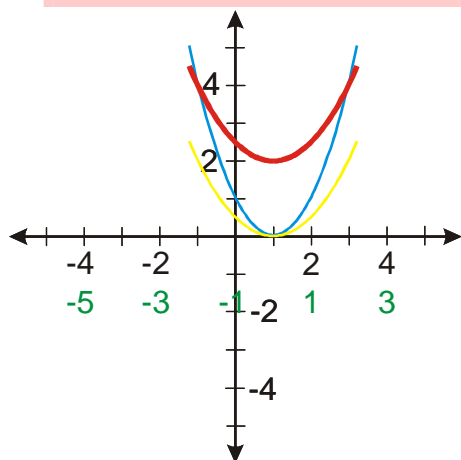
Zvolíme x

Vypočteme $x-1$

Nakreslíme funkci $y = f(x-1) = (x-1)^2$

Nakreslíme funkci $y = 0,5 \cdot f(x-1) = 0,5(x-1)^2$

Nakreslíme funkci $y = 0,5 \cdot f(x-1) + 2 = 0,5(x-1)^2 + 2$



Př. 10: Rozhodni jaký vliv mají konstanty K , L a M v předpisu funkce $y = K(x-L)^2 + M$ na její graf.

K – ovlivňuje šířku grafu, nebo ho obrací vzhůru nohama, pro kladná K je graf „d'olík“, pro záporná K „kopeček“.

L – posunuje graf ve vodorovném směru, je x -ovou souřadnicí minima nebo maxima

M – posunuje graf ve svislém směru, je y -vou souřadnicí maxima nebo minima

Př. 11: Nakreslete graf funkce $y = (|x|-1)^2 - 1$.

Platí: $y = (|x|-1)^2 - 1 = f(|x|-1) - 1$

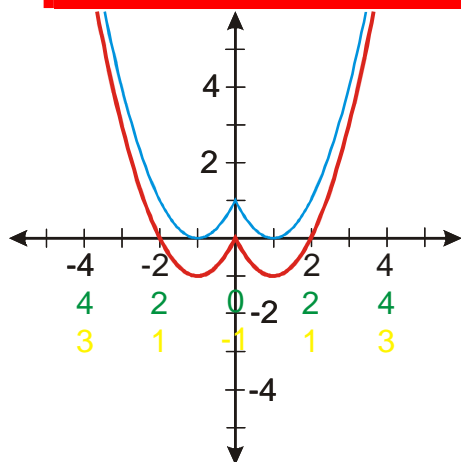
Zvolíme x

Vypočteme $|x|$

Vypočteme $|x|-1$

Nakreslíme funkci $y = f(|x|-1) = (|x|-1)^2$

Nakreslíme funkci $y = f(|x|-1) - 1 = (|x|-1)^2 - 1$



Př. 12: Nakresli graf funkce $y = x^2 - 2x$.

Řešení si necháme na příští hodinu.

Př. 13: Petáková:

strana 29/cvičení 54 f_5, f_6

Shrnutí: Grafem kvadratické funkce je parabola – „d'olík“ nebo „kopeček“ podle znaménka před x^2 .