2.5.2 Doplnění na čtverec I

Předpoklady: 2501

Pedagogická poznámka: Ideální je, pokud tato hodina vyjde na cvičení. Ze začátku dělají studenti chyby a je rozhodně snazší uhlídat studentů patnáct než třicet. Další kritické místo pak přichází v následujícího hodině u vytýkání.

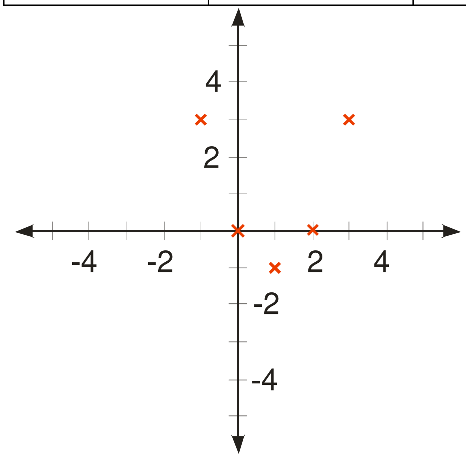
Pedagogická poznámka: V této hodině se cvičí dvě věci: schopnost dodržování algoritmu a schopnost převádět zdánlivě nové problémy na již zvládnutý příklad (samozřejmě se cvičí také schopnost pořádného zápisu). Říkám to studentům už na začátku hodiny, aby sami na sobě pozorovali, jak se jim v těchto dovednostech daří. Také mají větší šanci si všimnout, co dělají dobře.

Př. 1: Nakresli graf funkce $y = x^2 - 2x$.

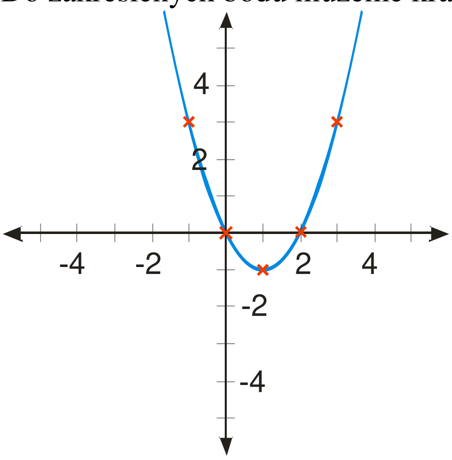
Problém – nejde přepsat na $y = f(x)$, v předpisu se x vyskytuje dvakrát.

Zoufalé řešení: vypočteme několik hodnot a zkusíme, zda z nich není něco vidět.

x	0	1	2	-1	3
$y = x^2 - 2x$	0	-1	0	3	3



Do zakreslených bodů můžeme krásně vložit parabolu.



Ze získaného grafu můžeme snadno určit i předpis funkce (je posunutá o jedna doprava a o jedna dolů): $y = (x-1)^2 - 1$.

Funkce $y = x^2 - 2x$ má stejný graf jako funkce $y = (x-1)^2 - 1$ $\Rightarrow$ zřejmě existuje způsob, jak předpis $y = x^2 - 2x$ se dvěma *x* upravit na tvar, kde je *x* pouze jedno (a dokážeme z něj snadno nakreslit graf) $\Rightarrow$ hledáme úpravu, kde vystupuje $(\ )^2$ před ní se vyskytují dvě *x* a po ní pouze jedno (případně obráceně - z jednoho *x* se stanou dvě).

Nápad: trojčlen $A^2 - 2AB + B^2 = (A-B)^2$ - *A* se vyskytovalo taky dvakrát, ale po použití vzorce už jenom jednou

Pokus: $\underbrace{y = x^2 - 2x = x^2 - 2x}_{A^2 - 2AB + B^2}$ místo *B* musíme mít ve vzorci takové číslo, aby platilo: $2x \cdot \textit{číslo} = 2x$, číslo je tedy jednička. Pokračujeme:

$y = x^2 - 2x = \underbrace{x^2 - 2x \cdot 1 +}_{A^2 - 2AB + B^2}$ - musíme přidat 1^2, abychom měli člen odpovídající B^2

$y = x^2 - 2x = \underbrace{x^2 - 2x \cdot 1 + 1^2}_{A^2 - 2AB + B^2}$ - předpis funkce by se změnil, musíme 1^2 zase odečíst

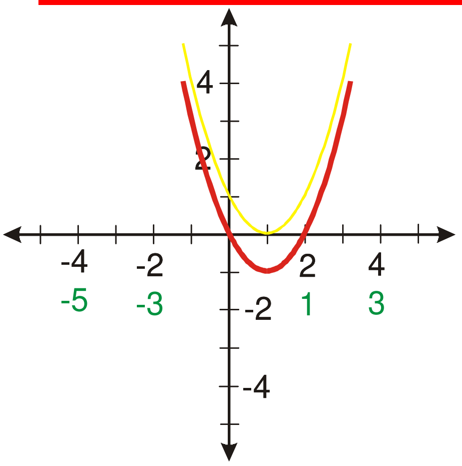
$$y = x^2 - 2x = \overbrace{x^2 - 2x}^{x^2 - 2x} \cdot 1 + \overbrace{1^2 - 1^2}^{0} = \left[x^2 - 2x \cdot 1 + 1^2\right] - 1^2 = (x-1)^2 - 1$$

$$A^2 - 2AB + B^2 \quad = \quad A^2 - 2AB + B^2 \quad = (A-B)^2$$

Teď už je to jednoduché: $y = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$

Platí: $y = (x-1)^2 - 1 = f(x-1) - 1$

Zvolíme x
Vypočteme $x-1$
Nakreslíme funkci $y = f(x-1) = (x-1)^2$
Nakreslíme funkci $y = f(x-1) - 1 = (x-1)^2 - 1$



Pedagogická poznámka: Když si z odhadnutého grafu rozebereme, jaký druh úpravy hledáme, vždycky se někdo najde, kdo si na vzorce pro druhou mocninu dvojčlenu vzpomene. S uplatněním je to horší, proto ho poměrně brzy ukazuji u tabule.

Tento postup se nazývá doplnění na čtverec. A patří do červených rámečků, protože ho budeme ještě mockrát potřebovat.

$$y = x^2 - 2x = \overbrace{x^2 - 2x}^{x^2-2x}\cdot 1 + \overbrace{1^2 - 1^2}^{0} = \left[x^2 - 2x\cdot 1 + 1^2\right] - 1^2 = (x-1)^2 - 1$$

$$A^2 - 2AB + B^2 \quad = \quad A^2 - 2AB + B^2 \quad = (A-B)^2$$

Př. 2: Uprav zadané kvadratické funkce doplněním na čtverec tak, aby bylo možné snadno nakreslit jejich graf.

a) $y = x^2 + 4x$ b) $y = x^2 - 8x$

a)

$$y = x^2 + 4x = \overbrace{x^2 + 2x\cdot 2}^{x^2+4x} + \overbrace{2^2 - 2^2}^{0} = \left[x^2 + 2x\cdot 2 + 2^2\right] - 2^2 = (x+2)^2 - 4$$

$$A^2 + 2AB + B^2 \quad = \quad A^2 + 2AB + B^2 \quad = (A+B)^2$$

b)

$$y = x^2 - 8x = \overbrace{x^2 - 2x\cdot 4}^{x^2-8x} + \overbrace{4^2 - 4^2}^{0} = \left[x^2 - 2x\cdot 4 + 4^2\right] - 4^2 = (x-4)^2 - 16$$

$$A^2 - 2AB + B^2 \quad = \quad A^2 - 2AB + B^2 \quad = (A-B)^2$$

Pedagogická poznámka: Studenti začnou velice záhy zkracovat zápis. Říkám jim, že to není na závadu, pokud mají kontrolu nad tím, co dělají a pokud budou schopni se v případě problémů vrátit k postupnému výpočtu.

Př. 3: Uprav kvadratickou funkci $y = x^2 - 2x + 2$ doplněním na čtverec tak, aby bylo možné snadno nakreslit její graf.

Zádrhel: Ve výrazu je navíc číslo 2, do úprav ho nepotřebujeme $\Rightarrow$ budeme ho jen opisovat na konci a uvidíme, co se stane.

$$y = x^2 - 2x + 2 = \overbrace{x^2 - 2x}^{x^2-2x}\cdot 1 + \overbrace{1^2 - 1^2}^{0} + 2 = \left[x^2 - 2x\cdot 1 + 1^2\right] - 1^2 + 2 = (x-1)^2 + 1$$

$$A^2 - 2AB + B^2 \quad = \quad A^2 - 2AB + B^2 \quad = (A-B)^2$$

Pedagogická poznámka: Část žáků přivede do rozpaků číslo 2, které v předchozích příkladech nebylo.

Př. 4: Uprav zadané kvadratické funkce doplněním na čtverec tak, aby bylo možné snadno nakreslit jejich graf.

a) $y = x^2 - 6x + 3$ b) $y = x^2 + 4x + 3$

a)

$$y = x^2 - 6x + 3 = \underbrace{\overbrace{x^2 - 2x\cdot 3}^{x^2-6x} + \overbrace{3^2 - 3^2}^{0}}_{A^2-2AB+B^2} + 3 = \underbrace{\left[x^2 - 2x\cdot 3 + 3^2\right]}_{=\ A^2-2AB+B^2} - 3^2 + 3 = \underbrace{(x-3)^2}_{=(A-B)^2} - 6$$

b)

$$y = x^2 + 4x + 3 = \underbrace{\overbrace{x^2 + 2x\cdot 2}^{x^2+4x} + \overbrace{2^2 - 2^2}^{0}}_{A^2+2AB+B^2} + 3 = \underbrace{\left[x^2 + 2x\cdot 2 + 2^2\right]}_{=\ A^2+2AB+B^2} - 2^2 + 3 = \underbrace{(x+2)^2}_{=(A+B)^2} - 1$$

Pedagogická poznámka: Dvojice předchozích dvou příkladů je důležitá. Studenti, kteří nechápou důvody odvozování a pracují mechanicky, většinou druhý příklad řeší takto:

$y = x^2 + 4x + 3 = x^2 + 2x\cdot 2 + 3^2 - 3^2 + 3 = \ldots$ Trojky tam dávají proto, že oba příklady mají absolutní člen roven třem. Že přidávají člen B^2, už zapomněli.

Př. 5: Uprav kvadratickou funkci $y = x^2 - 4x + 4$ doplněním na čtverec tak, aby bylo možné snadno nakreslit její graf.

$$y = x^2 - 4x + 4 = \underbrace{\overbrace{x^2 - 2x\cdot 2}^{x^2-4x} + \overbrace{2^2 - 2^2}^{0}}_{A^2-2AB+B^2} + 4 = \underbrace{\left[x^2 - 2x\cdot 2 + 2^2\right]}_{=\ A^2-2AB+B^2} - 2^2 + 4 = \underbrace{(x-2)^2}_{=(A-B)^2}$$

Př. 6: Uprav kvadratickou funkci $y = x^2 + 3x - 1$ doplněním na čtverec tak, aby bylo možné snadno nakreslit její graf.

Zádrhel: Z výrazu $3x$ se nedá snadno vytknout 2.

Řešení: Existují zlomky. $2\cdot\frac{3}{2} = 3 \Rightarrow y = x^2 + 3x - 1 = x^2 + 2\cdot x\frac{3}{2} + \ldots$

$$y = x^2 + 3x - 1 = \underbrace{\overbrace{x^2 + 2x\cdot\frac{3}{2}}^{x^2+3x} + \overbrace{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2}^{0}}_{A^2+2AB+B^2} - 1 = \underbrace{\left[x^2 + 2x\cdot\frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right]}_{=\ A^2+2AB+B^2} - \frac{9}{4} - 1 = \underbrace{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2}_{=(A+B)^2} - \frac{13}{4}$$

Př. 7: Uprav zadané kvadratické funkce doplněním na čtverec tak, aby bylo možné snadno nakreslit jejich graf.

a) $y = x^2 - x + 1$ b) $y = x^2 - \frac{3}{2}x - 2$

a)

$$y=x^2-x+1=\overbrace{x^2-2x\cdot\frac{1}{2}}^{x^2-x}+\overbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}^{0}+1=\left[x^2-2x\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]-\left(\frac{1}{2}\right)^2+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

$$A^2-2AB+B^2 \qquad = A^2-2AB+B^2 \qquad =(A-B)^2$$

b)

$$y=x^2-\frac{3}{2}x-2=\overbrace{x^2-2x\cdot\frac{3}{4}}^{x^2-\frac{3}{2}x}+\overbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2}^{0}-2=\left[x^2-2x\cdot\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2\right]-\frac{9}{16}-2=\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{41}{16}$$

$$A^2-2AB+B^2 \qquad = A^2-2AB+B^2 \qquad =(A-B)^2$$

Pedagogická poznámka: Poslední příklad v hodině neřešíme. Je to procvičení pro žáky, kteří měli v hodině problémy. Předem upozorňuji, že podobný příklad použijeme na začátku následující hodiny jako pětiminutovku.

Př. 8: Uprav předpisy zadaných kvadratických funkcí doplněním na čtverec tak, aby bylo možné snadno nakreslit jejich graf.
a) $y=x^2-10x$ b) $y=x^2+6x+5$ c) $y=x^2+x-1$

a) $y=x^2-10x=x^2-2\cdot x\cdot 5+5^2-5^2=(x-5)^2-25$

b) $y=x^2+6x+5=x^2+2x\cdot 3+3^2-3^2+5=(x+3)^2-4$

c) $y=x^2+x-1=x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2-1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$

Př. 9: Petáková:
strana 29/cvičení 54 $f_1, f_2, f_4, f_7, f_8, f_9$

Shrnutí: Z kvadratického trojčlenu můžeme vytvořit druhou mocninu tím, že jej doplníme na vzorec $(A\pm B)^2$.