2.5.2 Doplnění na čtverec I

Předpoklady: 2501

Pedagogická poznámka: Ideální je pokud tato hodina vyjde na cvičení. Ze začátku dělají studenti chyby a je rozhodně snazší uhlídat studentů patnáct než třicet. Další kritické místo pak přichází na konci u vytýkání.

Pedagogická poznámka: V této hodině se cvičí dvě věci: schopnost dodržování algoritmu a schopnost převádět zdánlivě nové problémy na již zvládnutý příklad (samozřejmě se cvičí také schopnost pořádného zápisu). Říkám to studentům už na začátku hodiny, aby sami na sobě pozorovali, jak se jim v těchto dovednostech daří. Také mají větší šanci si všimnout, co dělají dobře.

Př. 1: Nakresli graf funkce $y = x^2 - 2x$.

Problém – nejde přepsat na $y = f(x)$, v předpisu se x vyskytuje dvakrát.

Nápad: trojčlen $A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$ - A se vyskytovala taky dvakrát, ale po použití vzorce už jenom jednou

Pokus: $\underset{A^2 - 2AB + B^2}{y = x^2 - 2x = x^2 - 2x}$ místo B musíme mít ve vzorci takové číslo, aby platilo: $2x \cdot \check{c}\acute{\imath}slo = 2x$, číslo je tedy jednička. Pokračujeme:

$$\underset{A^2 - 2AB + B^2}{y = x^2 - 2x = x^2 - 2x \cdot 1 +}$$ - musíme přidat 1^2, abychom měli člen odpovídající B^2

$$\underset{A^2 - 2AB + B^2}{y = x^2 - 2x = x^2 - 2x \cdot 1 + 1^2}$$ - předpis funkce by se změnil, musíme 1^2 zase odečíst

$$y = x^2 - 2x = \overbrace{x^2 - 2x \cdot}^{x^2 - 2x} 1 + \overbrace{1^2 - 1^2}^{0} = \left[x^2 - 2x \cdot 1 + 1^2\right] - 1^2 = (x-1)^2 - 1$$

$$A^2 - 2AB + B^2 \quad = \quad A^2 - 2AB + B^2 \quad = (A - B)^2$$

Teď už je to jednoduché: $y = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$

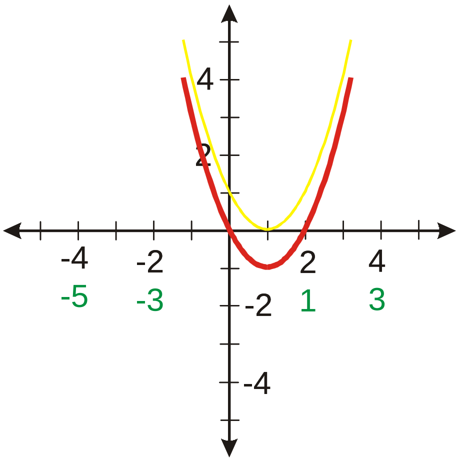
Platí: $y = (x-1)^2 - 1 = f(x-1) - 1$

Zvolíme x

Vypočteme $x - 1$

Nakreslíme funkci $y = f(x-1) = (x-1)^2$

Nakreslíme funkci $y = f(x-1) - 1 = (x-1)^2 - 1$



Pedagogická poznámka: Studenti mají jen velmi malou šanci přijít na postup samostatně. Nenechávám je dlouho čekat, pak si řekneme v čem je problém a nabídnu jim vzoreček $A^2 - 2AB + B^2 = (A-B)^2$. Potom ještě chvilku čekám a pak si příklad vyřešíme společně.

Tento postup se nazývá doplnění na čtverec. A patří do červených rámečků, protože ho budeme ještě mockrát potřebovat.

$$y = x^2 - 2x = \overbrace{x^2 - 2x}^{x^2-2x}\cdot 1 + \overbrace{1^2 - 1^2}^{0} = \left[x^2 - 2x\cdot 1 + 1^2\right] - 1^2 = (x-1)^2 - 1$$
$$A^2 - 2AB + B^2 \quad = \quad A^2 - 2AB + B^2 \quad = (A-B)^2$$

Př. 2: Uprav zadané kvadratické funkce doplněním na čtverec tak, aby bylo možné snadno nakreslit jejich graf.

a) $y = x^2 + 4x$ b) $y = x^2 - 8x$

a)

$$y = x^2 + 4x = \overbrace{x^2 + 2x\cdot 2}^{x^2+4x} + \overbrace{2^2 - 2^2}^{0} = \left[x^2 + 2x\cdot 2 + 2^2\right] - 2^2 = (x+2)^2 - 4$$
$$A^2 + 2AB + B^2 \quad = \quad A^2 + 2AB + B^2 \quad = (A+B)^2$$

b)

$$y = x^2 - 8x = \overbrace{x^2 - 2x\cdot 4}^{x^2-8x} + \overbrace{4^2 - 4^2}^{0} = \left[x^2 - 2x\cdot 4 + 4^2\right] - 4^2 = (x-4)^2 - 16$$
$$A^2 - 2AB + B^2 \quad = \quad A^2 - 2AB + B^2 \quad = (A-B)^2$$

Pedagogická poznámka: Studenti začnou velice záhy zkracovat zápis. Říkám jim, že to není na závadu, pokud mají kontrolu nad tím co dělají a pokud budou schopni se v případě problémů vrátit k postupnému výpočtu.

Př. 3: Uprav kvadratickou funkci $y = x^2 - 2x + 2$ doplněním na čtverec tak, aby bylo možné snadno nakreslit její graf.

$$y = x^2 - 2x + 2 = \overbrace{x^2 - 2x}^{x^2-2x}\cdot 1 + \overbrace{1^2 - 1^2}^{0} + 2 = \left[x^2 - 2x\cdot 1 + 1^2\right] - 1^2 + 2 = (x-1)^2 + 1$$

$$A^2 - 2AB + B^2 \quad = A^2 - 2AB + B^2 \quad = (A-B)^2$$

Pedagogická poznámka: Část žáků přivede do rozpaků číslo 2, které v předchozích příkladech nebylo.

Př. 4: Uprav zadané kvadratické funkce doplněním na čtverec tak, aby bylo možné snadno nakreslit jejich graf.

a) $y = x^2 - 6x + 3$ b) $y = x^2 + 4x + 3$

a)

$$y = x^2 - 6x + 3 = \overbrace{x^2 - 2x}^{x^2-6x}\cdot 3 + \overbrace{3^2 - 3^2}^{0} + 3 = \left[x^2 - 2x\cdot 3 + 3^2\right] - 3^2 + 3 = (x-3)^2 - 6$$

$$A^2 - 2AB + B^2 \quad = A^2 - 2AB + B^2 \quad = (A-B)^2$$

b)

$$y = x^2 + 4x + 3 = \overbrace{x^2 + 2x}^{x^2+4x}\cdot 2 + \overbrace{2^2 - 2^2}^{0} + 3 = \left[x^2 + 2x\cdot 2 + 2^2\right] - 2^2 + 3 = (x+2)^2 - 1$$

$$A^2 + 2AB + B^2 \quad = A^2 + 2AB + B^2 \quad = (A+B)^2$$

Pedagogická poznámka: Dvojce předchozích dvou příkladů je důležitá. Studenti, kteří nechápou důvody odvozování a pracují mechanicky většinou druhý příklad řeší takto:

$y = x^2 + 4x + 3 = x^2 + 2x\cdot 2 + 3^2 - 3^2 + 3 = \ldots$ Trojky tam dávají proto, že oba příklady mají absolutní člen roven třem. Že přidávají člen B^2 už zapomněli.

Př. 5: Uprav kvadratickou funkci $y = x^2 - 4x + 4$ doplněním na čtverec tak, aby bylo možné snadno nakreslit její graf.

$$y = x^2 - 4x + 4 = \overbrace{x^2 - 2x}^{x^2-4x}\cdot 2 + \overbrace{2^2 - 2^2}^{0} + 4 = \left[x^2 - 2x\cdot 2 + 2^2\right] - 2^2 + 4 = (x-2)^2$$

$$A^2 - 2AB + B^2 \quad = A^2 - 2AB + B^2 \quad = (A-B)^2$$

Př. 6: Uprav kvadratickou funkci $y = x^2 + 3x - 1$ doplněním na čtverec tak, aby bylo možné snadno nakreslit její graf.

$$y = x^2 + 3x - 1 = \underbrace{\overbrace{x^2 + 2x\cdot\frac{3}{2}}^{x^2+3x} + \overbrace{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2}^{0}}_{A^2+2AB+B^2} - 1 = \underbrace{\left[x^2 + 2x\cdot\frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right]}_{=\ A^2+2AB+B^2} - \frac{9}{4} - 1 = \underbrace{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2}_{=(A+B)^2} - \frac{13}{4}$$

Př. 7: Uprav zadané kvadratické funkce doplněním na čtverec tak, aby bylo možné snadno nakreslit jejich graf.

a) $y = x^2 - x + 1$ b) $y = x^2 - \frac{3}{2}x - 2$

a)

$$y = x^2 - x + 1 = \underbrace{\overbrace{x^2 - 2x\cdot\frac{1}{2}}^{x^2-x} + \overbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}^{0}}_{A^2-2AB+B^2} + 1 = \underbrace{\left[x^2 - 2x\cdot\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]}_{=\ A^2-2AB+B^2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \underbrace{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}_{=(A-B)^2} + \frac{3}{4}$$

b)

$$y = x^2 - \frac{3}{2}x - 2 = \underbrace{\overbrace{x^2 - 2x\cdot\frac{3}{4}}^{x^2-\frac{3}{2}x} + \overbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2}^{0}}_{A^2-2AB+B^2} - 2 = \underbrace{\left[x^2 - 2x\cdot\frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2\right]}_{=\ A^2-2AB+B^2} - \frac{9}{16} - 2 = \underbrace{\left(x - \frac{3}{4}\right)^2}_{=(A-B)^2} - \frac{41}{16}$$

Př. 8: Petáková:
strana 29/cvičení 54 $f_1, f_2, f_4, f_7, f_8, f_9$

Shrnutí: Z kvadratického trojčlenu můžeme vytvořit druhou mocninu tím, že je doplníme na vzorec $(A \pm B)^2$.