

2.5.5 Další úlohy s kvadratickými funkcemi

Předpoklady: 2501, 2502

Pedagogická poznámka: Tato hodina patří mezi ty méně organizované. Společně řešíme příklad 1, při dalším počítání se třída rozpadá. Já řeším příklady s pomalejší částí třídy, tak aby co nejvíce práce odvedli studenti a já vysvětloval co nejméně. Rychlejší studenti na nás nečekají a prokládají si příklady ze zadání příklady z Petákové.

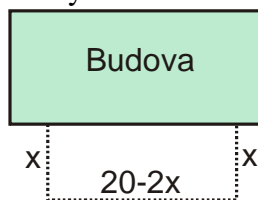
Př. 1: Zemědělec chce postavit výběh pro kuřata ve tvaru pravoúhelníku tak, že jednu stranu výběhu bude tvořit hospodářská budova. Celkem má k dispozici 20 m pletiva. Jaké mají být rozměry výběhu, aby jeho plocha byla co největší?

Nakreslíme obrázek situace:



Kdyby jednu stranu plotu nenahrazovala stěna budovy, byl by nejvýhodnějším tvarem čtverec. Pokud budeme jeden z rozměrů obdélníku příliš zvětšovat obdélník se zúží a jeho obsah se bude blížit k nule \Rightarrow měl by existovat kompromis, pro který bude obsah největší.

Zkusíme určit plochu výběhu v závislosti na jednom z rozměrů obdélníku, třeba na délce strany kolmé k budově, označíme si ji x :



$$S = ab = x(20 - 2x) = 20x - 2x^2$$

Plocha výběhu je kvadratickou funkcí jedné ze stran – u kvadratické funkce může existovat maximum \Rightarrow upravíme předpis a najdeme ho.

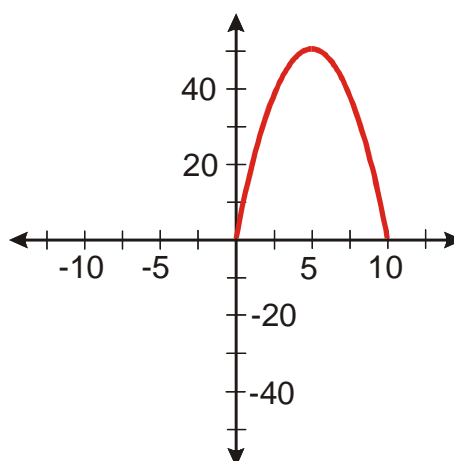
$$y = 20x - 2x^2 = -2x^2 + 20x = -2(x^2 - 10x) = -2(x^2 - 2x \cdot 5 + 5^2 - 5^2) = -2[(x - 5)^2 - 25]$$

$$y = -2(x - 5)^2 + 50$$

Funkce dosahuje maxima pro $x = 5$, hodnota maxima je 50.

Zemědělec musí postavit výběh ve tvaru obdélníku o rozměrech 5 x 10 m.

Pedagogická poznámka: Nechte studenty samostatně nakreslit obrázek, jestli vůbec rozumí zadání. Příklad je pro

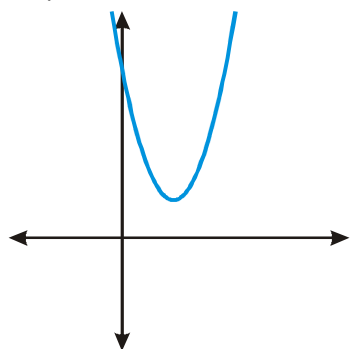


studenty určitě nezvyklý, není pravděpodobné, že by ho někdo vyřešil samostatně. Proto příliš dlouho s radou nečekám, ale v místech, kde je v řešení vynechaná řádka, vždy chvíli počkám, aby měli studenti šanci dovést řešení do konce.

Poznámka: Předchozí příklad je ukázkou úlohy na hledání extrému (největší nebo nejmenší hodnoty). Každá taková úloha se skládá ze dvou částí. V první části musíme najít funkci, která v závislosti na zvolené proměnné udává velikost veličiny, která nás zajímá. Tato část je obtížnější, nejedná se o čistě matematickou záležitost a musíme prokázat orientaci v konkrétním problému. V druhé části pak pouze hledáme maximum nebo minimum nalezené funkce, což je čistě matematický problém, který zejména po probrání derivací ve čtvrtém ročníku nepatří mezi příliš obtížné.

Př. 2: Na obrázku je v soustavě souřadnic, která není očíslována a nemusí mít stejné měřítko na obou osách, nakreslen graf kvadratické funkce. Která z následujících kvadratických funkcí mohou odpovídat tomuto grafu? Každé rozhodnutí zdůvodni.

- a) $y = (x - 2)^2 - 4$ b) $y = -x^2 + 2x - 3$ c) $y = 2(x - \pi)^2 + 4$
d) $y = 0,5x^2 + x + 2$ e) $y = x^2 - 4x + 2$



a) $y = (x - 2)^2 - 4$ neodpovídá grafu, minimum této funkce je posunuto doprava, ale pod osu x

b) $y = -x^2 + 2x - 3$ neodpovídá grafu, před x^2 je záporné číslo \Rightarrow graf funkce má tvar „kopečku“

c) $y = 2(x - \pi)^2 + 4$ odpovídá grafu, minimum této funkce je posunuto doprava nad osu x

d) $y = 0,5x^2 + x + 2$ neodpovídá grafu, minimum této funkce je posunuto doleva

e) $y = x^2 - 4x + 2$ minimum funkce je posunuto doprava, musíme zjistit, zda je posunuto nahoru nebo dolů \Rightarrow musíme doplnit předpis funkce na čtverec:

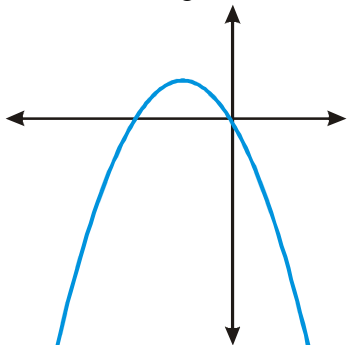
$y = x^2 - 4x + 2 = x^2 - 2x \cdot 2 + 2^2 - 2^2 + 2 = (x - 2)^2 - 2 \Rightarrow$ funkce neodpovídá obrázku, minimum je posunuto dolů

Pedagogická poznámka: V předchozím příkladu jde o vyřazování nesprávných možností. Před společnou kontrolou se bavíme o nejlepší strategii řešení. Snažím se dovést studenty k tomu, že některé možnosti můžeme vyloučit ihned, jiné potřebují podrobnější rozbor a proto se vyplatí postupovat ve dvou průchodech. V prvním průchodu vyškrtat to jasné a v druhém se podrobněji zabývat pouze tím, co zbude.

Pedagogická poznámka: Předchozí a následující příklad se snaží řešit obavy studentů z nejednoznačného kreslení přibližných grafů. V mnoha situacích stačí graf

přibližně načrtnout a nezdržovat se kreslením, což studenti dělají jenom zřídka (podobně se vyhýbají všem nejednoznačným úlohám).

Př. 3: Na obrázku je v soustavě souřadnic, která není očíslována a nemusí mít stejné měřítko na obou osách, nakreslen graf kvadratické funkce. Napiš předpis libovolné kvadratické funkce, která odpovídá tomuto grafu. Jaké hodnoty mohou mít koeficienty v předpisu funkce $y = A(x - B)^2 + C$, aby funkce odpovídala nakreslenému grafu?



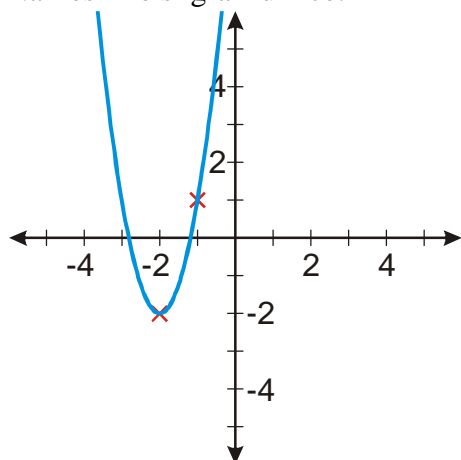
Grafu odpovídá například funkce $y = -2(x+1)^2 + 1$ (graf musí být převrácený do tvaru „kopečku“, maximum musí být posunuto doleva a nahoru).

Možné hodnoty koeficientů v předpisu: $y = A(x - B)^2 + C$:

- $A < 0$ - převrácení grafu do tvaru „kopečku“
- $B < 0$ - maximum musí být posunuto doleva (například pro $B = -1$ získáme $y = A[x - (-1)]^2 + C = A(x+1)^2 + C$)
- $C > 0$ - maximum musíme posunout nahoru

Př. 4: Urči předpis kvadratické funkce, která má minimum v bodě $[-2; -2]$ a prochází bodem $[-1; 1]$.

Nakreslíme si graf funkce:



Z polohy minima můžeme určit posunutí funkce ve svislém a vodorovné směru \Rightarrow hledaná funkce má tvar: $y = A(x+2)^2 - 2$.

Konstanta A určuje zeštíhlení grafu. Když se přesuneme z bodu $[-2; -2]$ do bodu $[-1; 1]$ posuneme se z minima o jedna do prava \Rightarrow hodnota y by se měla zvětšit o jedna. Z y -ových souřadnic obou zadaných bodů je vidět, že se y -ová hodnota změnila o 3 \Rightarrow funkce roste třikrát rychleji než funkce $y = (x + 2)^2 - 2 \Rightarrow$ hledaná funkce má předpis $y = 3(x + 2)^2 - 2$.

Dodatek: Hodnotu koeficientu A můžeme v předchozím příkladu také dopočítat (pro některé studenty je to pochopitelnější a tento postup je obecně často použitelnější):

Funkce má tvar $y = A(x + 2)^2 - 2$ prochází bodem $[-1; 1] \Rightarrow$ bod $[-1; 1]$ musí vyhovovat předpisu: $1 = A(-1 + 2)^2 - 2$
 $3 = A \cdot 1^2 \Rightarrow A = 3$.

Pedagogická poznámka: Postup uvedený v dodatku ukazují celé třídy při kontrole.

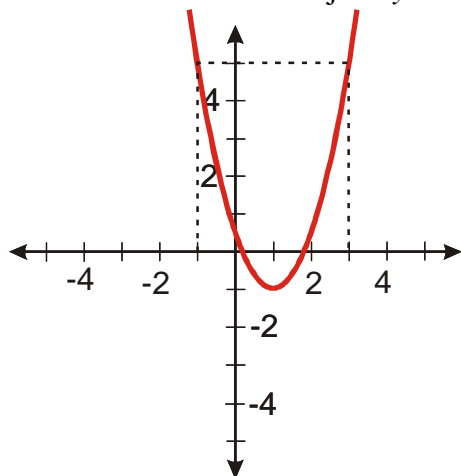
Pokud mají rychlejší studenti příklad špatně, chci po nich, aby nakreslili funkci podle svého zadání a porovnali výsledek kreslení se zadáním příkladu. Jde o to, aby se naučili hledat chyby a aby se ukázalo, jestli jsou schopni dodržet postup kreslení, nebo jej někde po cestě znásilní, aby získali graf ze zadání a měli pocit, že příklad vyřešili dobře.

Př. 5: Urči předpis kvadratické funkce, pro kterou platí: $H(f) = \langle -1; \infty \rangle$,
 $f(-1) = f(3) = 5$.

Nejdříve si načrtneme graf funkce, z grafu pak určíme předpis funkce ve tvaru $y = K(x - L) + M$.

$H(f) = \langle -1; \infty \rangle$ - hledaná funkce má tvar „d'olíku“ hodnota minima je -1 .

$f(-1) = f(3) = 5$ - získáme dva body grafu, protože oba mají i stejnou y -ovou hodnotu, můžeme určit i x -ovou souřadnici minima. Parabola je osově souměrná podle svislé přímky procházející minimem. x -ová souřadnice minima tak bude ležet ve středu mezi x -ovými souřadnicemi bodů se stejnou y -ovou souřadnicí.



Ze souřadnic minima můžeme ihned určit koeficienty L a M : $y = K(x - 1)^2 - 1$

Koeficient K určíme dosazením jednoho ze zadaných bodů, například $[-1; 5]$.

$$5 = K((-1) - 1)^2 - 1 \qquad 6 = K(-2)^2 \qquad 6 = 4K$$

$$K = \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{3}{2}(x-1)^2 - 1$$

$$y = \frac{3}{2}(x-1)^2 - 1 = \frac{3}{2}(x^2 - 2x + 1) - 1 = \frac{3}{2}x^2 - 3x + \frac{3}{2} - 1 = \frac{3}{2}x^2 - 3x + \frac{1}{2}$$

Zadaná funkce je $y = \frac{3}{2}x^2 - 3x + \frac{1}{2}$.

Pedagogická poznámka: S příkladem mají větší problémy Ti, kteří počítají dopředu a nezaregistrují druhý způsob vypočtení předchozí příkladu dosazením.

Př. 6: Urči předpis kvadratické funkce jejíž graf prochází body $A[1;0]$, $B\left[0;\frac{3}{2}\right]$, $C[5;4]$.

O žádném z bodů nevíme, že by byl maximem nebo minimem, žádné dva body nemají stejnou y -ovou souřadnici \Rightarrow nemáme žádnou speciální stopu \Rightarrow víme, že funkce má předpis $y = ax^2 + bx + c \Rightarrow$ musíme určit tři konstanty \Rightarrow potřebujeme tři rovnice, které získáme dosazením tří bodů.

$$\text{bod } A[1;0]: 0 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \Rightarrow a + b + c = 0$$

$$\text{bod } B\left[0;\frac{3}{2}\right]: \frac{3}{2} = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow c = \frac{3}{2}$$

$$\text{bod } C[5;4]: 4 = a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c \Rightarrow 25a + 5b + c = 4$$

Dosadíme za c do první a druhé rovnice:

$$a + b + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow 2a + 2b = -3 \Rightarrow 2b = -3 - 2a$$

$$25a + 5b + \frac{3}{2} = 4 \Rightarrow 50a + 10b = 5 \quad /:5 \Rightarrow 10a + 2b = 1$$

Dosadíme za $2b$ do druhé rovnice: $10a - 3 - 2a = 1$

$$8a = 4$$

$$a = \frac{1}{2}$$

$$2b = -3 - 2a = -3 - 2 \cdot \frac{1}{2} = -4 \Rightarrow b = -2$$

Hledaná funkce má předpis $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}$.

Pedagogická poznámka: Naprostá většina studentů, se snaží řešit příklad stejně jako předchozí – nakreslením grafu a dosazením do tvaru $y = A(x - B)^2 + C$. Pokud zbude čas povídáme si o tom, kdy je dobré zkusit přemýšlet o zcela jiné cestě výpočtu než se zdálo v prvním okamžiku.

Př. 7: Petáková:
strana 29/cvičení 46
strana 29/cvičení 48

strana 29/cvičení 50
strana 29/cvičení 51
strana 29/cvičení 52
strana 29/cvičení 53

Shrnutí: Předpisy kvadratických funkcí můžeme získat buď nakreslením grafu nebo dosazením známých bodů do obecného vyjádření.