2.5.9 Vztahy mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice

Předpoklady: 020301, 020507, 020508

Pedagogická poznámka: Náplň zřejmě přesahuje možnost jedné vyučovací hodiny. Příklady 8 a 9 zůstávají na cvičení nebo polovinu hodiny při písemce.

$ax^2 + bx + c = 0$ - základní tvar kvadratické rovnice, zbytečně mnoho koeficientů, vydělíme a (díky podmínce $a \neq 0$ můžeme), aby před x byla jednička (rovnice se tím nezmění).

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ - **normovaný tvar kvadratické rovnice**

Používá se i jiné označení koeficientů: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 + px + q = 0$

$\Rightarrow p = \frac{b}{a}$; $q = \frac{c}{a}$.

Jak souvisí hodnoty kořenů s koeficienty rovnice?

Př. 1: Najdi kořeny rovnice $x^2 + 3x + 2 = 0$.

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2}$$

$x_1 = \frac{-3+1}{2} = -1$ $\qquad$ $x_2 = \frac{-3-1}{2} = -2$

$K = \{-2; -1\}$

Víme, že kořeny rovnice $x^2 + 3x + 2 = 0$ jsou čísla -2 a -1 $\Rightarrow$ rovnice pro ně musí vyjít:

- $x = -2$: $x^2 + 3x + 2 = (-2)^2 + 3(-2) + 2 = 4 - 6 + 2 = 0$,
- $x = -1$: $x^2 + 3x + 2 = (-1)^2 + 3(-1) + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$.

Když víme, že pro $x_1 = -1$ vyjde $x^2 + 3x + 2 = 0$, můžeme rovnici napsat i jinak:

- $x^2 + 3x + 2 = (x - [-1])(x - ...) = (x+1)(x - ...) = 0$.

První (modrá) závorka vyjde 0 $\Rightarrow$ je zcela jedno, jakou hodnotu získáme z druhé závorky, a rovnice přesto vyjde.
To samé můžeme napsat pro druhý kořen $x_2 = -2$:

- $x^2 + 3x + 2 = (x - [-2])(x - ...) = (x+2)(x - ...) = 0$.

První (modrá) závorka vyjde 0 $\Rightarrow$ je zcela jedno, jakou hodnotu získáme z druhé závorky, a rovnice přesto vyjde.

Obě závorky můžeme zkombinovat: $x^2 + 3x + 2 = [x - (-2)] \cdot [x - (-1)] = (x+2)(x+1) = 0$.
Třetí takovou závorku nenajdeme:

- výraz $(x+2)(x+1)(x - ...) = 0$ by po roznásobení vytvořil třetí mocninu,

- číslo ve třetí závorce by bylo dalším (už třetím) kořenem kvadratické rovnice.

Využili jsme kořeny rovnice k získání součinového tvaru.

Př. 2: Kvadratická rovnice $x^2+px+q=0$ má kořeny x_1 a x_2. Rozlož rovnici pomocí kořenů na součin a správnost rozložení ověř dosazením.

Rozložení na součin:

$(x-x_1)\cdot(x-x_2)=0$ (v každé závorce je neznámá a opačné číslo k jednomu z kořenů)

Dosadíme $x=x_1$: $(x-x_1)\cdot(x-x_2)=(x_1-x_1)\cdot(x_1-x_2)=0\cdot(x_1-x_2)=0$.

Dosadíme $x=x_2$: $(x-x_1)\cdot(x-x_2)=(x_2-x_1)\cdot(x_2-x_2)=(x_2-x_1)\cdot 0=0$.

Jde o stejný systém, který jsme používali u některých funkcí, když jsme zjišťovali *x*-vou souřadnici minima nebo maxima. Ptali jsme se: „Co máme dát za *x*, aby se závorka vynulovala?".

Využijeme pro zkoumání kořenů: $x^2+px+q=(x-x_1)\cdot(x-x_2)=0$

$(x-x_1)\cdot(x-x_2)=x^2-x_2x-x_1x+x_1x_2=x^2+(-x_2-x_1)x+x_1x_2=0$

Máme rovnici zapsanou pomocí koeficientů *p*, *q* i pomocí kořenů x_1, x_2. Oba tvary porovnáme:

$$x^2+(-x_2-x_1)x+x_1x_2=0$$
$$x^2+\quad p\quad x+\quad q\quad =0$$

$p=\frac{b}{a}=(-x_2-x_1)$ $\quad q=\frac{c}{a}=x_1x_2$ Těmto vzorcům se říká **Vietovy.** Platí vždy, když má kvadratická rovnice alespoň jeden kořen, tedy $D=b^2-4ac=p^2-4\cdot 1q\geq 0$.

Pro kořeny x_1, x_2 kvadratické rovnice $x^2+px+q=0$, kde $p,q\in R$. $p^2-4q\geq 0$ platí: $p=\frac{b}{a}=-x_1-x_2$, $q=\frac{c}{a}=x_1\cdot x_2$.

Ve skutečnosti pro nás Vietovy vzorce nejsou nic nového. Používali jsme je pro rozkládání na součin.

$x^2+5x+6=0 \Rightarrow$ hledáme dvě čísla do rozkladu:

Součet má být 5 ($p=-x_1-x_2$ - čísla v rozkladu jsou opačná ke kořenům).

Součin má být 6 ($q=x_1\cdot x_2$) .

$\Rightarrow$ 2 a 3 $\Rightarrow$ $(x+2)\cdot(x+3)=0 \Rightarrow K=\{-3;-2\}$

Př. 3: Převeď kvadratickou rovnici na součinový tvar a urči její kořeny:
a) $x^2+2x-15=0$ b) $x^2-3x-4=0$ c) $x^2+7x+12=0$

a)

$x^2+2x-15=0$

$(x-3)\cdot(x+5)=0$ $\quad K=\{-5,3\}$

b)

$x^2-3x-4=0$

$(x-4)\cdot(x+1)=0$ $\qquad K=\{-1,4\}$

c)

$x^2+7x+12=0$

$(x+3)\cdot(x+4)=0$ $\qquad K=\{-4,-3\}$

Př. 4: Rozhodni, jaké musí být hodnoty koeficientů kvadratické rovnice $x^2+px+q=0$, aby její kořeny byla čísla navzájem opačná.

Kořeny jsou navzájem opačná čísla: $x_2=-x_1$.

Dosadíme do součinového tvaru a upravíme na tvar $x^2+px+q=0$.

$(x-x_1)\cdot(x-x_2)=0$ $\qquad$ použijeme $x_2=-x_1$.

$(x-x_1)\cdot[x-(-x_1)]=0$

$(x-x_1)\cdot(x+x_1)=0$ $\qquad$ teď roznásobíme závorky.

$x^2+xx_1-xx_1-x_1x_1=0$

$x^2-x_1x_1=0$

Přepíšeme na normovaný tvar: $\begin{array}{l} x^2+px+q=0 \\ x^2+0x-x_1^2=0 \end{array}$.

$\Rightarrow\ p=0,\ q=-x_1^2\ \Rightarrow\ q\le 0$

Platí $p=\dfrac{b}{a}=0\Rightarrow b=0$.

Pokud mají být kořeny kvadratické rovnice čísla navzájem opačná, musí se lineární člen rovnice rovnat nule a absolutní člen musí být záporné číslo nebo nula. To už ale víme, takové rovnice jsme řešili v předminulé hodině a rozkládali jsme je pomocí vzorce $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$.

Poznámka: Příklad je možné rovnou řešit dosazením do Vietových vzorců:

Kořeny jsou navzájem opačná čísla: $x_2=-x_1$.

$p=-x_1-x_2=p=-x_1-(-x_1)=-x_1+x_1=0$

$q=\dfrac{c}{a}=x_1\cdot x_2=x_1\cdot(-x_1)=-x_1^2$

Př. 5: Urči jaké vlastnosti musí mít koeficienty *a*, *b*, *c* kvadratické rovnice $ax^2+bx+c=0$, aby její kořeny byla čísla navzájem převrácená.

Kořeny jsou čísla navzájem převrácená: $x_2=\dfrac{1}{x_1}$.

Dosadíme do Vietových vzorců:

$p=-x_1-x_2=-x_1-\dfrac{1}{x_1}$ $\qquad$ - nic zajímavého.

$q=x_1\cdot x_2=x_1\cdot\dfrac{1}{x_1}=1$

$q = 1 = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a$

Kořeny kvadratické rovnice jsou čísla navzájem převrácená, když je její koeficient kvadratického členu roven členu absolutnímu ($a = c$).

Př. 6: Napiš libovolnou konkrétní kvadratickou rovnici, jejíž kořeny jsou čísla navzájem převrácená a svůj odhad potvrď výpočtem kořenů.

Absolutní člen rovnice se musí rovnat jedné. Například: $x^2 - 4x + 1 = 0$.

$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$

$x_1 = 2 - \sqrt{3}$ $\qquad$ $x_2 = 2 + \sqrt{3}$

$x_1 \cdot x_2 = \left(2 - \sqrt{3}\right)\left(2 + \sqrt{3}\right) = 4 - 3 = 1$

Př. 7: Jeden z kořenů kvadratické rovnice $3x^2 - 8x + q = 0$ je třikrát menší než druhý. Urči oba kořeny a hodnotu parametru *q*.

Vztah mezi kořeny: $x_1 = \frac{1}{3} x_2 \Rightarrow x_2 = 3x_1$.

Vzorce mezi koeficienty kvadratické rovnice a jejími kořeny platí v případě, že rovnice je zapsaná v normovaném tvaru $\Rightarrow$ převedeme rovnici na normovaný tvar:

$3x^2 - 8x + q = 0 \quad / : 3$

$x^2 - \frac{8}{3} x + \frac{q}{3} = 0 \Rightarrow$

$p = -x_1 - x_2 = -\frac{8}{3} \Rightarrow x_1 + x_2 = x_1 + 3x_1 = \frac{8}{3}$

$4x_1 = \frac{8}{3} \Rightarrow x_1 = \frac{2}{3} \Rightarrow x_2 = 3x_1 = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2$

$\frac{q}{3} = x_1 x_2 = \frac{2}{3} \cdot 2 \Rightarrow q = 4$

Kvadratická rovnice má tvar $3x^2 - 8x + 4 = 0$ a jejími kořeny jsou čísla $\frac{2}{3}$ a 2.

Pedagogická poznámka: Nejsem si úplně jistý, zda následující dva příklady mají takovou důležitost, jaká se jim přikládá. Na druhou stranu si myslím, že samostatné řešení osmého příkladu je po většinou společném řešení sedmého dobrým testem pochopení. Řešení samotné sedmičky nemá podle mě ani čtvrtinový přínos jako řešení obou příkladů.

Př. 8: Aniž bys řešil rovnici $x^2 - 3x + 1 = 0$ najdi rovnici, jejíž kořeny jdou o jedna větší než kořeny rovnice $x^2 - 3x + 1 = 0$.

Podle Vietových vzorců platí:

$-x_1 - x_2 = -3 \Rightarrow x_1 + x_2 = 3$ $\qquad$ $x_1 x_2 = 1$

Hledaná rovnice: $y^2 + py + q = 0$, má kořeny $y_1; y_2$.

Kořeny hledané rovnice jsou o jedna větší: $y_1 = x_1 + 1$, $y_2 = x_2 + 1$.
Vietovy vzorce pro novou rovnici:
$-p = y_1 + y_2 = x_1 + 1 + x_2 + 1 = (x_1 + x_2) + 2 = 3 + 2 = 5 \Rightarrow p = -5$
$q = y_1 y_2 = (x_1 + 1)(x_2 + 1) = x_1 x_2 + (x_1 + x_2) + 1 = 1 + 3 + 1 = 5$.
Kořeny o jedna větší než jsou kořeny rovnice $x^2 - 3x + 1 = 0$ má rovnice $y^2 - 5y + 5 = 0$.

Pedagogická poznámka: Více než polovina studentů udělá chybu na začátku, když nepřevedou rovnici do normovaného tvaru. I když se snažím, aby celý příklad počítali samostatně, na tuto chybu upozorňuji celou třídu, aby zbytečně neztratili příliš času počítáním na základě špatných hodnot *p*, *q*.

Př. 9: Aniž bys řešil rovnici $2x^2 + 5x - 3 = 0$ najdi rovnici, jejíž kořeny jdou dvakrát větší než kořeny rovnice $2x^2 + 5x - 3 = 0$.

Upravíme původní rovnici do normovaného tvaru: $x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = 0$.
Podle Vietových vzorců platí:
$-x_1 - x_2 = \frac{5}{2} \Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{5}{2}$ $\qquad x_1 x_2 = -\frac{3}{2}$
Hledaná rovnice: $y^2 + py + q = 0$, má kořeny $y_1; y_2$.
Kořeny hledané rovnice jsou 2 krát větší: $y_1 = 2x_1$, $y_2 = 2x_2$.
Vietovy vzorce pro novou rovnici:
$$p = -y_1 - y_2 = -2x_1 - 2x_2 = -2(x_1 + x_2) = -2\left(-\frac{5}{2}\right) = 5$$
$$q = y_1 y_2 = 2x_1 2x_2 = 4x_1 x_2 = 4\left(-\frac{3}{2}\right) = -6.$$
Dvakrát větší kořeny než jsou kořeny rovnice $2x^2 + 5x - 3 = 0$ má rovnice $y^2 + 5y - 6 = 0$.

Př. 10: Petáková:
strana 13/cvičení 7
strana 13/cvičení 8
strana 13/cvičení 9
strana 13/cvičení 10
strana 13/cvičení 11
strana 13/cvičení 12

Shrnutí: Mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice existují vztahy, které už jsme využívali při rozkladu kvadratických trojčlenů na součin.