

2.5.10 Kvadratický trojčlen

Předpoklady: 020501, 020503, 020508, 020509

Kvadratický trojčlen je každý trojčlen, který je možné zapsat ve tvaru $ax^2 + bx + c$, kde $a \neq 0$.

Odkud ho známe?

- levá strana kvadratické rovnice
- předpis kvadratické funkce

Co je vlastně kvadratický trojčlen?

Výraz, který zastupuje nekonečně mnoho čísel, která získáme, když do trojčlenu dosazujeme konkrétní čísla za x .

- Ptáme se: „Kdy se trojčlen rovná nule?“ \Rightarrow kvadratická rovnice.
- Ptáme se: „Jak se mění hodnoty trojčlenu pro různá x ?“ \Rightarrow kvadratická funkce.

Vlastně celou kapitolu probíráme různé aplikace kvadratického trojčlenu.

Co budeme dělat přímo s trojčlenem?

Hledání maxima a minima

Př. 1: Urči, jaké minimální nebo maximální hodnoty může dosáhnout kvadratický trojčlen $x^2 - 6x + 2$.

Hodnoty kvadratického trojčlenu sledujeme pomocí funkce \Rightarrow hledáme maximum nebo minimum kvadratické funkce $y = x^2 - 6x + 2$ (to už umíme).

Graf funkce $y = x^2 - 6x + 2$ je „dřolík“ \Rightarrow nemá maximální hodnotu.

Minimální hodnota = minimum funkce.

$$y = x^2 - 6x + 2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 + 2 = (x - 3)^2 - 7.$$

Nejmenší hodnotou, které může trojčlen $x^2 - 6x + 2$ dosáhnout, je -7 pro $x = 3$.

Př. 2: Urči, jaké minimální nebo maximální hodnoty může dosáhnout kvadratický trojčlen $-2x^2 - 6x - 10$.

Graf funkce $y = -2x^2 - 6x - 10$ je „kopeček“ \Rightarrow nemá minimální hodnotu.

Maximální hodnota = maximum funkce.

$$\begin{aligned} y &= -2x^2 - 6x - 10 = -2(x^2 + 3x) - 10 = -2 \left[x^2 + 2x \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \right] - 10 = \\ &= -2 \left[\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \right] - 10 = -2 \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{2} - 10 = -2 \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{11}{2} \end{aligned}$$

Největší hodnotou, které může trojčlen $-2x^2 - 6x - 10$ dosáhnout, je $-\frac{11}{2}$ pro $x = -\frac{3}{2}$.

Pedagogická poznámka: V předchozím příkladu poměrně často studenti dělají chybu v tom, že vtáhnou -10 do závorky a pak zapomenou číslo, které zůstane po doplnění na čtverec vynásobit ze závorky ven.

Rozklad na součin

Při rozkladu využíváme kořeny kvadratické rovnice odpovídající trojčlenu. Pokud má kvadratická rovnice $x^2 + px + q = 0$ kořeny x_1 a x_2 , můžeme kvadratický trojčlen $x^2 + px + q$ rozložit na součin $(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$.

Proč to funguje, jsme si říkali minule.

Na co je to dobré?

Řešení rovnic, krácení zlomků ...

Př. 3: Rozlož na součin kvadratický trojčlen $x^2 - 5x + 6$.

Kořeny rovnice $x^2 - 5x + 6 = 0$: $x_1 = 2$; $x_2 = 3$.

$$(x - x_1)(x - x_2) \\ x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

Př. 4: Rozlož na součin kvadratický trojčlen $2x^2 + 10x + 12$.

Kořeny rovnice $2x^2 + 10x + 12 = 0$: $x_1 = -2$; $x_2 = -3$

První nápad: $2x^2 + 10x + 12 = [x - (-2)][x - (-3)] = (x + 2)(x + 3)$. Nechybí tam dvojka?

Zpětné roznásobení: $(x + 2)(x + 3) = x^2 + 2x + 3x + 6 = x^2 + 5x + 6 \Rightarrow$ musíme závorky ještě vynásobit koeficientem a .

Správné řešení:

$$(x - x_1) (x - x_2) \\ 2x^2 + 10x + 12 = 2[x - (-2)][x - (-3)] = 2(x + 2)(x + 3)$$

Př. 5: Rozlož na součin kvadratický trojčlen $x^2 + 4x + 4$.

Kořeny rovnice $x^2 + 4x + 4 = 0$: $x_1 = x_2 = -2$.

$$(x - x_1) (x - x_2) \\ x^2 + 4x + 4 = [x - (-2)][x - (-2)] = (x + 2)(x + 2) = (x + 2)^2$$

Př. 6: Rozlož na součin kvadratický trojčlen $x^2 + x + 3$.

Kořeny rovnice $x^2 + x + 3 = 0$: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{-11}}{2}$.

Kořeny rovnice neexistují \Rightarrow trojčlen $x^2 + x + 3 = 0$ nelze rozložit.

Př. 7: Sestav přehlednou tabulku, která zachycuje, jak závisí rozklad kvadratického trojčlenu na kořenech odpovídající kvadratické rovnice.

Rozklad kvadratického trojčlenu $ax^2 + bx + c$ závisí na řešení kvadratické rovnice

$ax^2 + bx + c = 0$ takto:

Kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ má:

2 kořeny $x_1; x_2$

1 kořen x_1

Žádný kořen

Kvadratický trojčlen $ax^2 + bx + c$ rozložíme:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$$

nelze rozložit

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad má smysl jen tehdy, když se studenti opravdu sami pokusí srovnat výsledky předchozích příkladů a roztržít je do konzistentních skupin. Zejména roztržení trojčlenů, které jdou rozložit, není na první pohled jednoznačné. Oprávněně se na první pohled jeví i rozdělení podle toho, zda se mimo závorky vyskytuje ještě koeficient a , ale jednak toto rozdělení neodpovídá různým případům řešení kvadratické rovnice a jednak je možné bez problémů koeficient vtáhnout do jedné nebo po rozdělení i obou závorek.

Př. 8: Najdi všechny kvadratické rovnice, které mají kořeny $\frac{2}{7}; -\frac{1}{3}$

Známe kořeny \Rightarrow známe rozklad na součin, z něj roznásobením získáme rovnici:

$$(x - x_1)(x - x_2) = \left(x - \frac{2}{7}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) = x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{7}x - \frac{2}{21} = x^2 + \frac{1}{21}x - \frac{2}{21} = 0$$

Kořeny se nezmění, když rovnici vynásobíme nenulovým číslem (zbavíme se zlomků):

$$x^2 + \frac{1}{21}x - \frac{2}{21} = 0 \quad / \cdot 21$$

$21x^2 + x - 2 = 0$ jiná rovnice, ale stejné kořeny.

Stejně jako jsme násobili 21, mohli jsme násobit jakýmkoliv jiným nenulovým číslem a kořeny rovnice by se nezměnily \Rightarrow

Hledané rovnice jsou: $a(21x^2 + x - 2) = 0 \quad a \in R - \{0\}$

Pedagogická poznámka: Než prozradíte studentům, kteří nevyřeší příklad sami řešení, zkuste jim pomoc tím, že jim připomenete, aby si vzpomněli, co všechno o rovnici ví, když už znají její kořeny.

Př. 9: Rozlož na součin kvadratický trojčlen:

a) $-x^2 + x + 12$

b) $10x^2 + 39x + 14$

c) $-12x^2 + 5x + 2$

d) $12x^2 - 19x + \frac{15}{2}$

e) $x^2 + 3x + 1$

f) $x^2 + x - 2x\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$

a) kořeny rovnice $x^2 - x - 12 = 0$: $x_1 = 4; x_2 = -3$

$$-x^2 + x + 12 = -(x^2 - x - 12) = -(x + 3)(x - 4)$$

b) kořeny rovnice $10x^2 + 39x + 14$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-39 \pm \sqrt{39^2 - 4 \cdot 10 \cdot 14}}{2 \cdot 10} = \frac{-39 \pm 31}{20}$$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{8}{20} = -\frac{2}{5}, x_2 = -\frac{70}{20} = -\frac{7}{2}$$

$$10x^2 + 39x + 14 = 10 \left(x + \frac{2}{5} \right) \left(x + \frac{7}{2} \right) = (5x + 2)(2x + 7)$$

c) kořeny rovnice $12x^2 - 5x - 2 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 12 \cdot (-2)}}{2 \cdot 12} = \frac{5 \pm 11}{24}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}, x_2 = -\frac{6}{24} = -\frac{1}{4}$$

$$-12x^2 + 5x + 2 = -12 \left(x - \frac{2}{3} \right) \left(x + \frac{1}{4} \right) = -(3x - 2)(4x + 1)$$

d) kořeny rovnice $12x^2 - 19x + \frac{15}{2}$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-19) \pm \sqrt{(-19)^2 - 4 \cdot 12 \cdot \frac{15}{2}}}{2 \cdot 12} = \frac{19 \pm 1}{24}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{20}{24} = \frac{5}{6}, x_2 = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

$$12x^2 - 19x + \frac{15}{2} = 12 \left(x - \frac{5}{6} \right) \left(x - \frac{3}{4} \right) = (6x - 5) \left(2x - \frac{3}{2} \right)$$

e) kořeny rovnice $x^2 + 3x + 1 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x^2 + 3x + 1 = \left[x - \left(\frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \right) \right] \left[x - \left(\frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \right) \right] = \left(x + \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right) \left(x + \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)$$

f) kořeny rovnice $x^2 + x - 2x\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-(1 - 2\sqrt{2}) \pm \sqrt{(1 - 2\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-\sqrt{2})}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 + 2\sqrt{2} \pm \sqrt{1 - 4\sqrt{2} + 8 + 4\sqrt{2}}}{2} =$$

$$= \frac{-1 + 2\sqrt{2} \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 + 2\sqrt{2} \pm 3}{2}$$

$$x_1 = \frac{-1 + 2\sqrt{2} + 3}{2} = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2} \quad x_2 = \frac{-1 + 2\sqrt{2} - 3}{2} = \frac{-4 + 2\sqrt{2}}{2} = -2 + \sqrt{2}$$

$$x^2 + x - 2x\sqrt{2} - \sqrt{2} = (x - [1 + \sqrt{2}]) (x - [-2 + \sqrt{2}]) = (x - 1 - \sqrt{2})(x + 2 - \sqrt{2}) =$$

Pedagogická poznámka: Jakmile studenti začnou používat na rozklady vzorec pro kořeny kvadratické rovnice, zapomenou psát do rozkladů koeficient a . Je potřeba jim připomínat trojčlen není rovnice a vynásobením se změní jeho hodnota.

Př. 10: Petáková:

strana 13/cvičení 14 d) g) k) o) p) r)

strana 13/cvičení 15 c) h)

strana 13/cvičení 16 a) b)

Shrnutí: