2.6.2 Grafy lineárně lomených funkcí

Předpoklady: 2413, 2601

Pedagogická poznámka: Celá hodina je věnována kreslení grafů lineárních funkcí pomocí metody, kreslení obecné funkce. Jednak jde o opakování metody a pak o její uplatnění v „nové“ situaci. Celou hodinu by studenti měli postupovat sami, bez větší pomoci.
Problémem lineárně lomených funkcí je menší přehlednost grafů (zřejmě je to důsledek „přetrženosti hyperboly na dvě větve“). Proto jej dobré trvat na kreslení asymptot, které jsou pro kontrolu správnosti zásadní.
Náplň hodiny je možné vynecháním některých příkladů stlačit do 25 minut, ale nepovažuji to za vhodné.
Studenti většinou touto dobou přestávají rozepisovat postup pro kreslení funkce. Netrvám na tom, aby ho psali, pokud příklad dokážou vyřešit, v případě chyby je to většinou první věc, kterou jim radím.

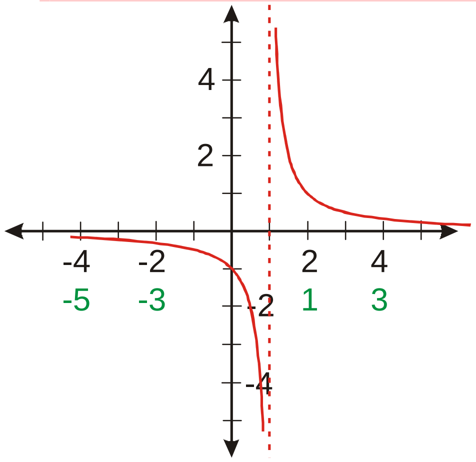
Př. 1: Nakresli graf funkce $y=\frac{1}{x-1}$, urči její definiční obor a obor hodnot.

Platí: $y=\frac{1}{x-1}=f(x-1)$

Zvolím x

Vypočtu $x-1$

Nakreslím funkci $y=f(x-1)=\frac{1}{x-1}$



$D(f)=R-\{1\}$

$H(f)=R-\{0\}$

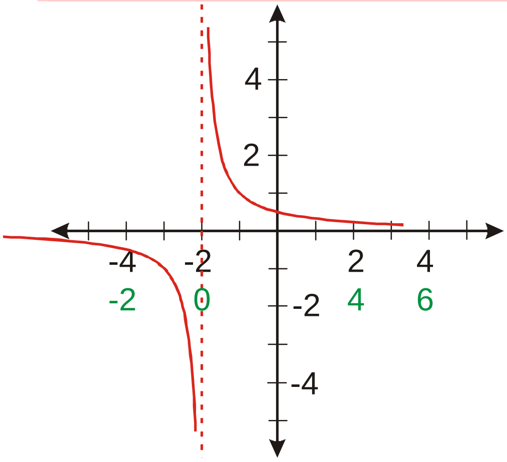
Př. 2: Nakresli graf funkce $y=\frac{1}{x+2}$, urči její definiční obor a obor hodnot.

Platí: $y=\frac{1}{x+2}=f(x+2)$

Zvolím x

Vypočtu $x+2$

Nakreslím funkci $y = f\left(x+2\right) = \dfrac{1}{x+2}$



$D\left(f\right) = R - \{-2\}$

$H\left(f\right) = R - \{0\}$

Pedagogická poznámka: Lineární lomené funkce jsou ideální příležitostí k diskusím o tom, proč posouvání po ose *y* odpovídá přímo číslům v zadání funkce, zatímco posouvání po ose *x* odpovídá číslům k nim opačným. Ze zlomku v lineární lomené funkce je přímo vidět, že zakázat musíme takové *x*, které dá s číslem ve jmenovateli nulu (tedy číslo opačné). Naopak u osy *y* jde přímo o číslo, které nám říká kam se nula posune.

Př. 3: Nakresli graf funkce $y = \dfrac{1}{x+1} - 2$, urči její definiční obor a obor hodnot.

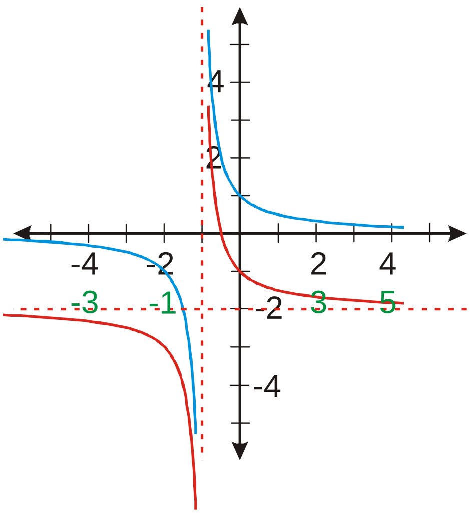
Platí: $y = \dfrac{1}{x+1} - 2 = f\left(x+1\right) - 2$

Zvolím x

Vypočtu $x+1$

Nakreslím funkci $y = f\left(x+1\right) = \dfrac{1}{x+1}$

Nakreslím funkci $y = f\left(x+1\right) - 2 = \dfrac{1}{x+1} - 2$



$D(f) = R - \{-1\}$

$H(f) = R - \{-2\}$

Př. 4: Nakresli graf funkce $y = -\frac{1}{x-2} - 1$. Urči její definiční obor a obor hodnot.

Platí: $-\frac{1}{x-2} - 1 = -f(x-2) - 1$

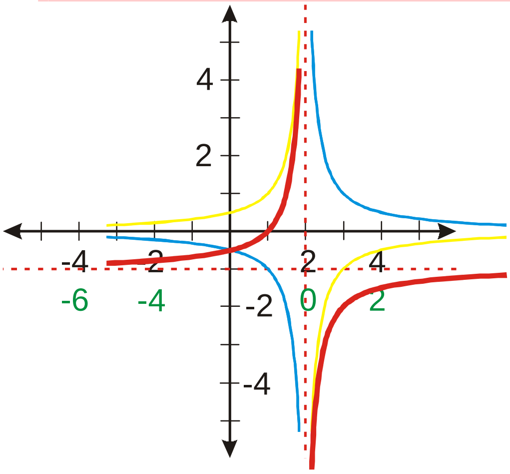
Zvolím x

Vypočtu $x-2$

Nakreslím funkci $y = f(x-2) = \frac{1}{x-2}$

Nakreslím funkci $y = -f(x-2) = -\frac{1}{x-2}$

Nakreslím funkci $y = -f(x-2) - 1 = -\frac{1}{x-2} - 1$



$D(f) = R - \{2\}$

$H(f) = R - \{-1\}$

Př. 5: Rozhodni, jaký vliv na graf lineární lomené funkce mají hodnoty koeficientů *k*, *A*, *B* v předpisu $y=\frac{k}{x-A}+B$. Urči definiční obor a obor hodnot této funkce.

k – převrací funkci ve svislém směru (pokud je $k<0$), „přitlačuje“ a „odtlačuje“ graf od asymptot
A – posouvá graf funkce ve vodorovném směru
B – posouvá graf funkce ve svislém směru
$D(f)=R-\{A\}$ (když dosadím za $x=A$ ve jmenovateli vychází nula)
$H(f)=R-\{B\}$ (výraz $\frac{k}{x-A}$ se nikdy nerovná nule $\Rightarrow$ $\frac{k}{x-A}+B\neq B$)

Př. 6: Najdi předpis lineární lomené funkce, pro kterou platí: $D(f)=R-\{2\}$, $H(f)=R-\{-1\}$, graf prochází bode $[3;-3]$.

Lineární lomená funkce má tvar: $y=\frac{k}{x-A}+B$.
Definiční obor neobsahuje číslo 2 $\Rightarrow$ $A=2$
Obor hodnot neobsahuje číslo –1 $\Rightarrow$ $B=-1$
$\Rightarrow$ funkce má tvar: $y=\frac{k}{x-2}-1$, dosadíme bod $[3;-3]$

$-3=\frac{k}{3-2}-1$
$-3+1=k$ $\Rightarrow$ $k=-2$
Hledaná funkce má tvar $y=-\frac{2}{x-2}-1$

Př. 7: Najdi všechny lineární lomené funkce, pro které platí $D(f)=R-\{\pi\}$, $H(f)=R-\{\sqrt{2}\}$.

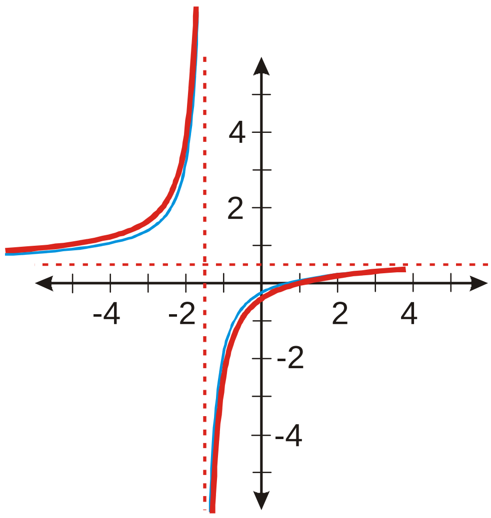
Lineární lomená funkce má tvar: $y=\frac{k}{x-A}+B$
Definiční obor neobsahuje číslo π $\Rightarrow$ $A=\pi$
Obor hodnot neobsahuje číslo $\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ $B=\sqrt{2}$
$\Rightarrow$ funkce má tvar: $y=\frac{k}{x-\pi}+\sqrt{2}$
Protože nemáme žádné další informace, nemůžeme určit poslední konstantu.
Uvedené požadavku splňují všechny funkce ve tvaru $y=\frac{k}{x-\pi}+\sqrt{2}$, $k\in R-\{0\}$.

Př. 8: Nakresli graf funkce $y=-\dfrac{\frac{5}{4}}{x+\frac{3}{2}}+\dfrac{1}{2}$. Při kreslení grafu využij řešení příkladu 5.

Urči její definiční obor a obor hodnot. Urči souřadnice průsečíků se souřadnými osami.

$y=-\dfrac{\frac{5}{4}}{x+\frac{3}{2}}+\dfrac{1}{2}$, $y=\dfrac{k}{x-A}+B$ $\Rightarrow$ platí: $A=-\dfrac{3}{2}$ (graf posuneme vodorovně o $\dfrac{3}{2}$ doleva),

$B=\dfrac{1}{2}$ (graf posuneme o $\dfrac{1}{2}$ nahoru), $k=-\dfrac{5}{4}$ (graf je převrácený a trochu více vzdálený od asymptot), asymptoty se protínají v bodě $\left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right]$.



$D(f)=R-\left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$ $\qquad$ $H(f)=R-\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

Průsečík s osou *x*: platí $y=0$, dosadíme: $y=0=-\dfrac{\frac{5}{4}}{x+\frac{3}{2}}+\dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\frac{5}{4}}{x+\frac{3}{2}}=\dfrac{1}{2}$ $\quad / \cdot 4\left(x+\dfrac{3}{2}\right)$

$5=2\left(x+\dfrac{3}{2}\right)=2x+3$

$2=2x$ $\Rightarrow$ $x=1$ $\Rightarrow$ průsečík s osou *x* leží v bodě $[1;0]$

Průsečík s osou *y*: platí $x=0$, dosadíme: $y=-\dfrac{\frac{5}{4}}{x+\frac{3}{2}}+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{\frac{5}{4}}{0+\frac{3}{2}}+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{5}{6}+\dfrac{3}{6}=-\dfrac{1}{3}$ $\Rightarrow$

průsečík s osou *y* leží v bodě $\left[0;-\dfrac{1}{3}\right]$.

Př. 9: Petáková:
strana 58/cvičení 9 f_2, f_3, f_4

Shrnutí: Grafy lineární lomené funkce kreslíme stejným způsobem jako grafy jiných funkcí.