

2.6.3 Úprava předpisu lineární lomené funkce

Předpoklady: 2601, 2602

Př. 1: Nakresli graf funkce $y = \frac{x}{x-1}$. Urči její definiční obor a obor hodnot.

Je to vůbec předpis lineární lomené funkce? Nemůžeme nakreslit graf, v předpisu se vyskytuje x na dvou místech. Už jsme to řešili u kvadratických funkcí, ale teď nemáme žádný vzorec. Nechtěného x v čitateli se dá zbavit vykrácením.

$$y = \frac{x}{x-1} = \frac{\overbrace{x-1+1}^0}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} + \frac{1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-1} + 1 - \text{to už nakreslíme snadno}$$

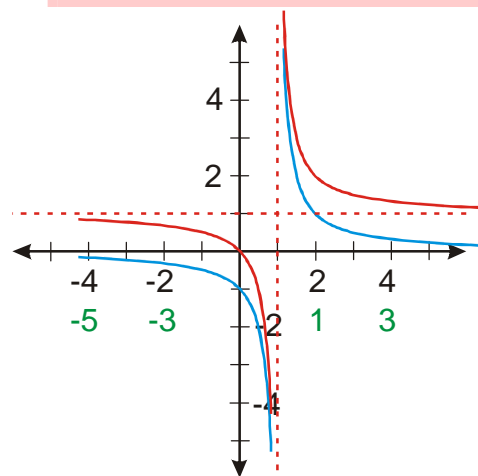
Platí: $y = \frac{1}{x-1} + 1 = f(x-1) + 1$

Zvolíme x

Vypočteme $x-1$

Nakreslíme funkci $y = f(x-1) = \frac{1}{x-1}$

Nakreslíme funkci $y = f(x-1) + 1 = \frac{1}{x-1} + 1$



$$D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$H(f) = \mathbb{R} - \{1\}$$

Př. 2: Uprav předpisy lineárních lomených funkcí tak, aby bylo možné nakreslit jejich graf.

a) $y = \frac{x+1}{x-2}$

b) $y = \frac{x+2}{x+1}$

c) $y = \frac{x-1}{x+2}$

Nakresli graf funkce $y = \frac{x-1}{x+2}$. Urči její definiční obor a obor hodnot.

a)

$$y = \frac{x+1}{x-2} = \frac{x-2+2+1}{x-2} = \frac{x-2}{x-2} + \frac{3}{x-2} = 1 + \frac{3}{x-2}$$

b)

$$y = \frac{x+2}{x+1} = \frac{x+1+1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} + \frac{1}{x+1} = 1 + \frac{1}{x+1}$$

c)

$$y = \frac{x-1}{x+2} = \frac{\overbrace{x+2-2-1}^0}{x+2} = \frac{x+2}{x+2} + \frac{-3}{x+2} = 1 - \frac{3}{x+2} = -\frac{3}{x+2} + 1$$

Platí: $-\frac{3}{x+2} + 1 = -3f(x+2) + 1$

Zvolíme x

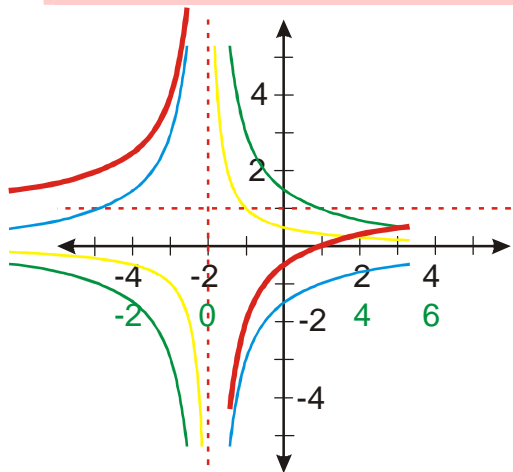
Vypočteme $x+2$

Nakreslíme funkci $y = f(x+2) = \frac{1}{x+2}$

Nakreslíme funkci $y = 3f(x+2) = \frac{3}{x+2}$

Nakreslíme funkci $y = -3f(x+2) = -\frac{3}{x+2}$

Nakreslíme funkci $y = -3f(x+2) + 1 = -\frac{3}{x+2} + 1$



$$D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$$

$$H(f) = \mathbb{R} - \{1\}$$

Př. 3: Uprav předpis lineární lomené funkce $y = \frac{2x+3}{x+1}$ tak, aby bylo možné nakreslit její graf.

Problém: Překáží nám dvojka v čitateli. Můžeme ji vytknout a tím získáme předchozí příklad.

$$y = \frac{2x+3}{x+1} = \frac{2\left(x+\frac{3}{2}\right)}{x+1} = 2 \left[\frac{x+\frac{3}{2}}{x+1} \right] = 2 \left[\frac{x+1+\frac{1}{2}}{x+1} \right] = 2 \left[\frac{x+1}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x+1} \right] = 2 \left[1 + \frac{\frac{1}{2}}{x+1} \right] = 2 + \frac{1}{x+1}$$

Poznámka: Další možností úpravy je postupná likvidace x v čitateli:

$$y = \frac{2x+3}{x+1} = \frac{x+x+3}{x+1} = \frac{x+1+x+1+1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} + \frac{x+1}{x+1} + \frac{1}{x+1} = 1+1+\frac{1}{x+1} = 2 + \frac{1}{x+1}$$

nebo doplnění čitatele na dvojnásobek jmenovatele:

$$y = \frac{2x+3}{x+1} = \frac{x+x+3}{x+1} = \frac{2x+2+1}{x+1} = \frac{2x+2}{x+1} + \frac{1}{x+1} = 2 + \frac{1}{x+1}$$

Př. 4: Uprav předpis lineární lomené funkce $y = \frac{x-1}{2x+3}$ tak, aby bylo možné nakreslit její graf.

Problém: Dvojka před x ve jmenovateli. Stačí ji vytknout jako v předchozích případech.

$$y = \frac{x-1}{2x+3} = \frac{x-1}{2\left(x+\frac{3}{2}\right)} = \frac{1}{2} \left[\frac{x-1}{x+\frac{3}{2}} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{x+\frac{3}{2}-\frac{3}{2}-1}{x+\frac{3}{2}} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{x+\frac{3}{2}}{x+\frac{3}{2}} - \frac{\frac{5}{2}}{x+\frac{3}{2}} \right] = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\frac{5}{2}}{x+\frac{3}{2}} \right] = \frac{1}{2} - \frac{\frac{5}{4}}{x+\frac{3}{2}}$$

Př. 5: Uprav předpisy lineárních lomených funkcí tak, aby bylo možné nakreslit jejich graf.

$$\text{a) } y = \frac{2x-4}{x+1} \qquad \text{b) } y = \frac{x+2}{2x-3} \qquad \text{c) } y = \frac{3x-1}{x+1}$$

$$\text{a) } y = \frac{2x-4}{x+1} = 2 \left(\frac{x-2+1-1}{x+1} \right) = 2 \left(\frac{x+1}{x+1} - \frac{3}{x+1} \right) = 2 - \frac{6}{x+1}$$

$$\text{b) } y = \frac{x+2}{2x-3} = \frac{1}{2} \left(\frac{x+2}{x-\frac{3}{2}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{x+2+\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}{x-\frac{3}{2}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{x-\frac{3}{2}}{x-\frac{3}{2}} + \frac{\frac{7}{2}}{x-\frac{3}{2}} \right) = \frac{1}{2} + \frac{\frac{7}{4}}{x-\frac{3}{2}}$$

$$\text{c) } y = \frac{3x-1}{x+1} = 3 \left(\frac{x-\frac{1}{3}}{x+1} \right) = 3 \left(\frac{x-\frac{1}{3}+1-1}{x+1} \right) = 3 \left(\frac{x+1}{x+1} - \frac{\frac{4}{3}}{x+1} \right) = 3 - \frac{4}{x+1}$$

Př. 6: Uprav předpis lineární lomené funkce $y = \frac{1-x}{x-2}$ tak, aby bylo možné nakreslit její graf.

Problém: před x v čitateli je mínus. Můžeme ho vytknout a tím získáme předchozí příklad.

$$\begin{aligned} y &= \frac{1-x}{x-2} = \frac{-(x-1)}{x-2} = -\frac{x-1}{x-2} = -\frac{x-1-1+1}{x-2} = -\frac{x-2+1}{x-2} = -\left[\frac{x-2}{x-2} + \frac{1}{x-2}\right] = -\left[1 + \frac{1}{x-2}\right] = \\ &= -1 - \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{x-2} - 1 \end{aligned}$$

Př. 7: Uprav předpis lineární lomené funkce $y = \frac{3x-3}{2x-4}$ tak, aby bylo možné nakreslit její graf. Nakresli její graf a urči její definiční obor a obor hodnot.

Problém: Čísla před x ve jmenovateli i čitateli. Stačí je vytknout jako v předchozích případech.

$$\begin{aligned} y &= \frac{3x-3}{2x-4} = \frac{3(x-1)}{2(x-2)} = \frac{3}{2} \frac{x-1}{x-2} = \frac{3}{2} \left[\frac{x-2+2-1}{x-2} \right] = \frac{3}{2} \left[\frac{x-2+2-1}{x-2} \right] = \frac{3}{2} \left[\frac{x-2}{x-2} + \frac{1}{x-2} \right] = \\ &= \frac{3}{2} \left[1 + \frac{1}{x-2} \right] = \frac{3}{2} + \frac{\frac{3}{2}}{x-2} \end{aligned}$$

Platí: $\frac{\frac{3}{2}}{x-2} + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} f(x-2) + \frac{3}{2}$

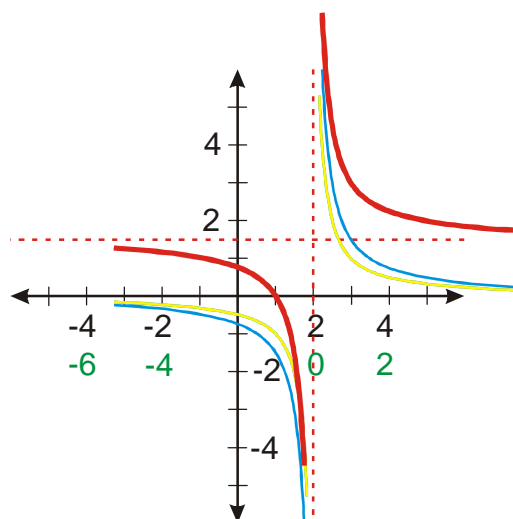
Zvolíme x

Vypočteme $x-2$

Nakreslíme funkci $y = f(x-2) = \frac{1}{x-2}$

Nakreslíme funkci $y = \frac{3}{2} f(x-2) = \frac{\frac{3}{2}}{x-2}$

Nakreslíme funkci $\frac{3}{2} f(x-2) + \frac{3}{2} = \frac{\frac{3}{2}}{x-2} + \frac{3}{2}$



$$D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$H(f) = \mathbb{R} - \left\{ \frac{3}{2} \right\}$$

Př. 8: Petáková:
strana 58/cvičení 9 f_5, f_7, f_{10}, f_{12}

Shrnutí: Předpis lineární lomené funkce je možné upravit podobně jako předpis kvadratické funkce do tvaru, který umožňuje nakreslit její graf.