

2.6.4 Lineární lomené funkce s absolutní hodnotou

Předpoklady: 2602, 2603

Pedagogická poznámka: Hlavním cílem hodiny je nácvik volby odpovídajícího postupu. Proto je dobré nechat studentům chvíli, aby si metody sepsali (metodu třetí jsme speciálně nezdůrazňovali, proto ji uvede jen málokdo), společně si zkontrolovali, u každé zhodnotili výhody a nevýhody a pak teprve začali řešit další příklady.

Př. 1: Projdi sešit a sepiš všechny metody, které jsme používali při kreslení grafů funkcí s absolutní hodnotou. U každé metody napiš její výhody a její omezení.

Používali jsme v podstatě tři metody:

1. metoda dělení definičního oboru na intervaly

Podle znaménka výrazu uvnitř absolutní hodnoty jsme absolutní hodnotu odstranili a v jednotlivých intervalech jsme nakreslili grafy odpovídajících funkcí, pak jsme vytáhli odpovídající části grafů.

Výhoda: jde aplikovat prakticky vždy (i vícekrát po sobě).

Nevýhoda: pomalá, složitá, pokud je uvnitř absolutní hodnoty složitější výraz.

2. metoda napodobení výpočtu

Nakreslíme graf funkce uvnitř absolutní hodnoty a tento graf změníme podle toho, jak mění čísla absolutní hodnota, můžeme aplikovat i při přečíslovávání osy.

Výhoda: rychlá a snadno kontrolovatelná.

Nevýhoda: není možné ji uplatnit, pokud se v předpisu vícekrát vyskytuje neznámá.

3. metoda kreslení sudé funkce

Pokud je funkce sudá, nakreslíme graf pouze pro kladná x a pro záporná jej překreslíme pomocí osové souměrnosti.

Výhoda: rychlé a jednoduché.

Nevýhoda: můžeme použít pouze v případě, že funkce je sudá.

Pedagogická poznámka: U všech následujících příkladů je důležité kontrolovat dostatečnou preciznost provedení. Příliš ledabylé kreslení vede k chybám.

Př. 2: Nakresli libovolnou metodou graf funkce $y = \left| \frac{1}{x-1} - 1 \right|$. Než začneš kreslit, zhodnoť výhodnost jednotlivých metod.

Jaké máme možnosti?

- **1. dělení na intervaly a odstranění absolutní hodnoty:** obtížné, není moc vidět, kdy je výraz uvnitř absolutní hodnoty kladný, museli bychom řešit nerovnici $\frac{1}{x-1} - 1 > 0$.
- **2. napodobení výpočtu:** nakreslíme graf funkce $y = \frac{1}{x-1} - 1$ a použijeme na něj absolutní hodnotu (převrácení částí pod osou x) – jednodušší, absolutní hodnota přichází na řadu až jako poslední.

- **3. metoda kreslení sudé funkce:** funkce není sudá, nejde použít.

⇒ Použijeme metodu napodobení výpočtu:

1. Graf funkce: $y = \frac{1}{x-1} - 1$

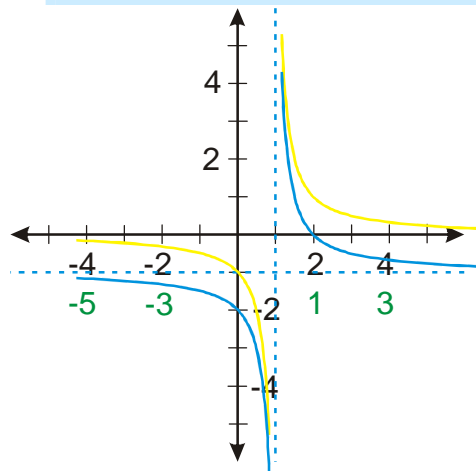
$$y = \frac{1}{x-1} - 1 = f(x-1) - 1$$

Zvolíme x

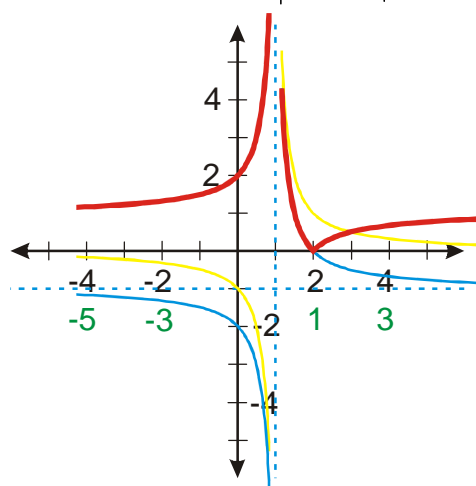
Vypočteme $x-1$.

Nakreslíme funkci $y = f(x-1) = \frac{1}{x-1}$.

Nakreslíme funkci $y = f(x-1) - 1 = \frac{1}{x-1} - 1$.



2. Graf funkce: $y = \left| \frac{1}{x-1} - 1 \right|$ - uplatníme na předchozí graf absolutní hodnotu.



Pedagogická poznámka: Někteří studenti špatně převrací graf. Místo osy x používají asymptotu $y = -1$.

Př. 3: Nakresli libovolnou metodou graf funkce $y = \frac{1}{|x|-1} + 2$. Než začneš kreslit, zhodnot' výhodnost jednotlivých metod.

Jaké máme možnosti?

- **1. dělení na intervaly a odstranění absolutní hodnoty:** snadné (v absolutní hodnotě je pouze x), ale zdlouhavé.
- **2. napodobení výpočtu:** nakreslíme funkci jako $f(|x|-1) + 2$, není to příliš obtížné.
- **3. metoda kreslení sudé funkce:** funkce $y = \frac{1}{|x|-1} + 2$ je sudá funkce (x se v předpisu vyskytuje pouze v absolutní hodnotě, takže nezáleží na jeho znaménku), nakreslíme graf funkce $y = \frac{1}{x-1} + 2$, pro kladná čísla ho vytáhneme, pro záporná čísla překopíruji výsledek z kladných čísel.

⇒ Použijeme metodu kreslení sudé funkce:

1. Kreslíme graf funkce $y = \frac{1}{x-1} + 2$

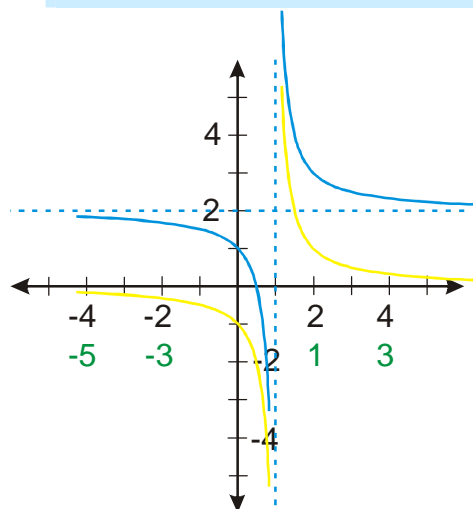
$$y = \frac{1}{x-1} + 2 = f(x-1) + 2$$

Zvolíme x .

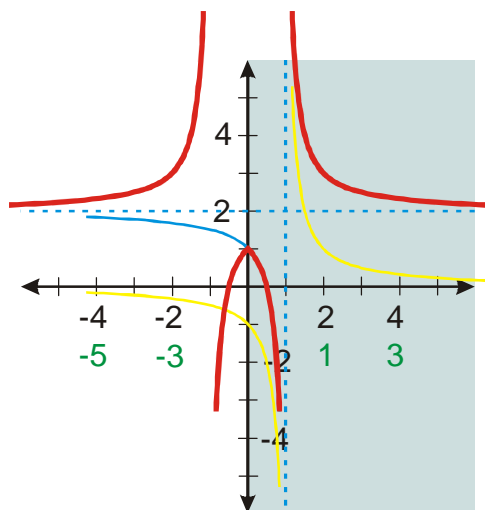
Vypočteme $x-1$.

Nakreslíme funkci $y = f(x-1) = \frac{1}{x-1}$.

Nakreslíme funkci $y = f(x-1) + 2 = \frac{1}{x-1} + 2$.



2. Vytahujeme pravou část grafu a pomocí osové souměrnosti ji přenášíme na levou stranu.



Pedagogická poznámka: V tomto příkladu bývá nejvíce chyb, značná část z nich začíná už ve špatné identifikaci platné části grafu funkce $y = \frac{1}{x-1} + 2$.

Př. 4: Nakresli libovolnou metodou graf funkce $y = \frac{x}{|x-1|}$. Než začneš kreslit, zhodnot' výhodnost jednotlivých metod.

Jaké máme možnosti?

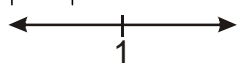
- **1. dělení na intervaly a odstranění absolutní hodnoty:** poměrně snadné (v absolutní hodnotě je pouze $x-1$), ale zdlouhavé.
- **2. napodobení výpočtu:** nejde, v předpisu je dvakrát neznámá.
- **3. metoda kreslení sudé funkce:** nejde, funkce není sudá.

⇒ Použijeme metodu dělení na intervaly:

1. zjistíme předpisy funkce pro jednotlivé intervaly

Zjistíme nulový bod absolutní hodnoty:

$$|x-1|: x=1$$



⇒ dva intervaly

$$1) x \in (-\infty; 1)$$

$$x-1 < 0 \Rightarrow |x-1| = -x+1$$

$$y = \frac{x}{-x+1} = \frac{x}{-(x-1)} = -\left[\frac{x}{x-1}\right] = -\left[\frac{x-1+1}{x-1}\right] = -\left[1 + \frac{1}{x-1}\right] = -\frac{1}{x-1} - 1$$

$$2) x \in (1; \infty)$$

$$x-1 > 0 \Rightarrow |x-1| = x-1$$

$$y = \frac{x}{x-1} = \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-1} + 1$$

2. Kreslíme grafy funkcí pro jednotlivé intervaly

a) Kreslíme graf funkce $y = -\frac{1}{x-1} - 1 = -f(x-1) - 1$.

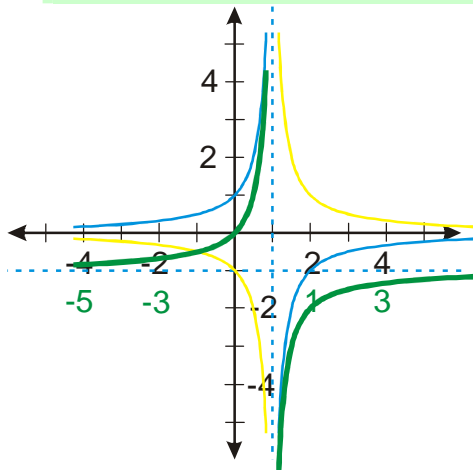
Zvolíme x .

Vypočteme $x-1$

Nakreslíme funkci $y = f(x-1) = \frac{1}{x-1}$.

Nakreslíme funkci $y = -f(x-1) = -\frac{1}{x-1}$.

Nakreslíme funkci $y = -f(x-1) - 1 = -\frac{1}{x-1} - 1$.



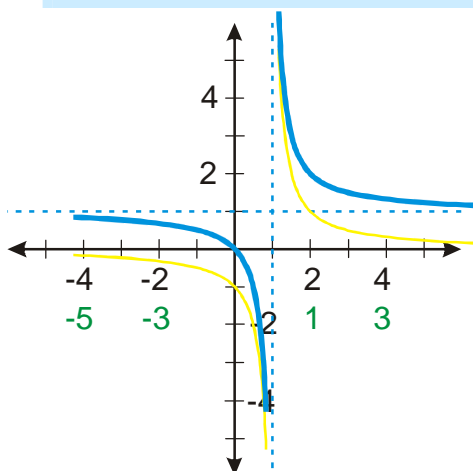
b) Kreslíme graf funkce $y = \frac{1}{x-1} + 1 = f(x-1) + 1$.

Zvolíme x .

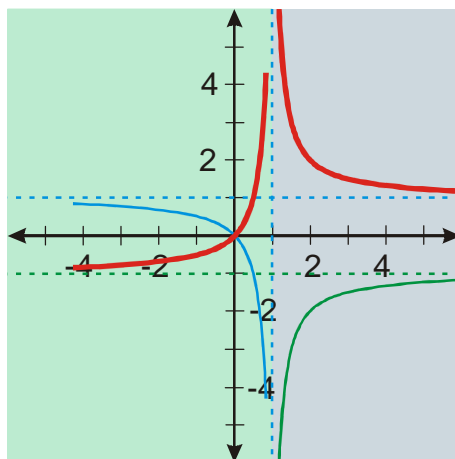
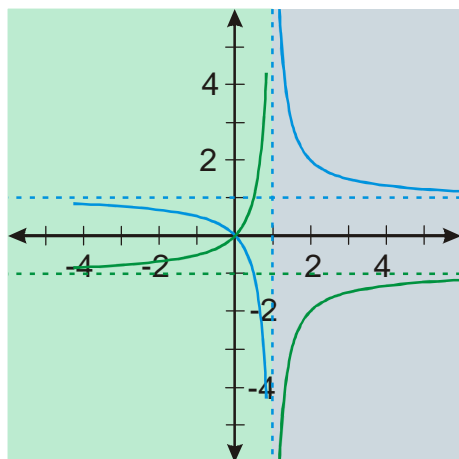
Vypočteme $x-1$.

Nakreslíme funkci $y = f(x-1) = \frac{1}{x-1}$.

Nakreslíme funkci $y = f(x-1) + 1 = \frac{1}{x-1} + 1$.



3. Nakreslíme oba grafy do jednoho obrázku a vytáhneme jejich odpovídající části



Pedagogická poznámka: Rozhodně není nutné, aby studenti kreslili grafy částečných funkcí celé a zvlášť. Mohou kreslit rovnou pouze jejich platnou část, ale vždy je nutné, aby používali takový postup, ve kterém se ještě orientují.

Př. 5: U následujících funkcí najdi nejvhodnější metodu na kreslení jejího grafu. Graf nekresli.

a) $y = \frac{|x|+1}{|2x|-4}$

b) $y = \left| \frac{1}{x-1} - 1 \right|$

c) $y = \frac{|x+1}{|x-1|}$

a) $y = \frac{|x|+1}{|2x|-4}$ - funkce je sudá (všechna x jsou v absolutní hodnotě) \Rightarrow nakreslíme graf metodou sudé funkce.

b) $y = \left| \frac{1}{x-1} - 1 \right|$ - funkce není sudá, v předpisu je neznámá pouze jednou \Rightarrow použijeme metodu napodobení výpočtu.

c) $y = \frac{|x+1}{|x-1|}$ - funkce není sudá, neznámá se v předpisu vyskytuje dvakrát \Rightarrow nakreslíme graf metodou dělení definičního oboru.

Př. 6: Nakresli libovolnou metodou graf funkce $y = \left| \frac{x}{|x|-1} - 1 \right|$. Než začneš kreslit, zhodnot' výhodnost jednotlivých metod.

Funkce není sudá a obsahuje dvakrát neznámou \Rightarrow musíme použít metodu dělení definičního oboru. Funkce však obsahuje vnořené absolutní hodnoty (ty vnější se těžko odstraňují) \Rightarrow budeme postupovat ve dvou krocích:

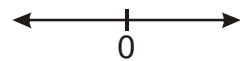
I. nakreslíme graf funkce $y = \frac{x}{|x|-1} - 1$,

II. na nakreslený graf aplikujeme absolutní hodnotu (jako při metodě sledování výpočtu).

I. kreslení grafu funkce $y = \frac{x}{|x|-1} - 1$

1. zjistíme předpisy funkce pro jednotlivé intervaly

Zjistíme nulový bod absolutní hodnoty:

$$|x|: \quad x=0$$
A horizontal number line with arrows at both ends. A vertical tick mark is labeled '0' below it.

\Rightarrow dva intervaly

1) $x \in (-\infty; 0)$

$$|x| = -x$$

$$y = \frac{x}{|x|-1} - 1 = \frac{x}{-x-1} - 1 = -\left(\frac{x+1-1}{x+1}\right) - 1 = -\left(\frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1}\right) - 1 = -1 + \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{1}{x+1} - 2$$

2) $x \in (0; \infty)$

$$|x| = x$$

$$y = \frac{x}{|x|-1} - 1 = \frac{x}{x-1} - 1 = \frac{x-1+1}{x-1} - 1 = \frac{x-1}{x-1} + \frac{1}{x-1} - 1 = \frac{1}{x-1}$$

2. Kreslíme grafy funkcí pro jednotlivé intervaly

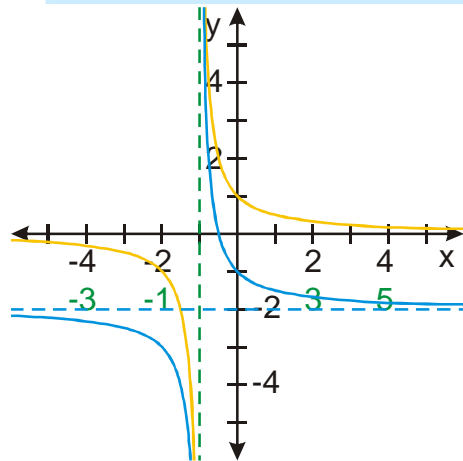
a) Kreslíme graf funkce $y = \frac{1}{x+1} - 2 = f(x+1) - 2$.

Zvolíme x .

Vypočteme $x+1$.

Nakreslíme funkci $y = f(x+1) = \frac{1}{x+1}$.

Nakreslíme funkci $y = f(x-1) - 2 = \frac{1}{x+1} - 2$.

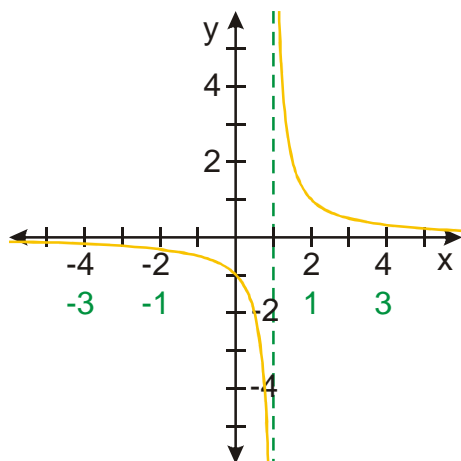


b) Kreslíme graf funkce $y = \frac{1}{x-1} = f(x-1)$.

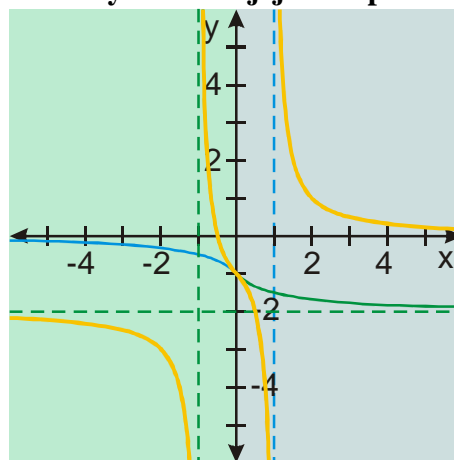
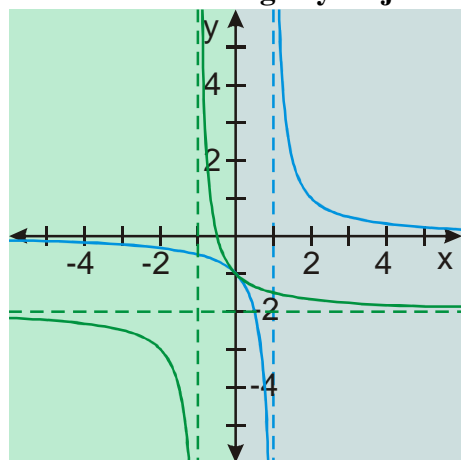
Zvolíme x .

Vypočteme $x-1$.

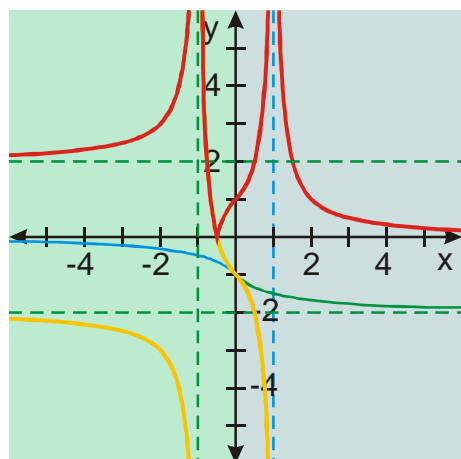
Nakreslíme funkci $y = f(x-1) = \frac{1}{x-1}$.



3. Nakreslíme oba grafy do jednoho obrázku a vytáhneme jejich odpovídající části



II. na nakreslený graf aplikujeme absolutní hodnotu a získáme graf $y = \left| \frac{x}{|x|-1} - 1 \right|$



Př. 7: Petáková:
strana 58/cvičení 10 $g_2, g_3, g_4; g_6$

Shrnutí: Při kreslení grafů lineárních funkcí je důležité zvolit nejvýhodnější metodu.