

2.6.5 Další použití lineárních lomených funkcí

Předpoklady: 2602, 2603

U předchozích funkcí jsme měli vždy s funkcemi rovnice \Rightarrow existují lineární lomené rovnice a nerovnice? Jak by vypadaly?

Například takto: $\frac{1}{x-1} = 1$ nebo $\frac{1}{x-1} \leq 1$.

To už známe, umíme je řešit, jen jsme jim neříkali lineární lomené.

Pedagogická poznámka: První čtyři příklady nechám studenty počítat bez společné kontroly, aby si nevšimli, jak důležité je dělat podmínku. Při řešení třetího příkladu většina studentů zapomene na podmínku a získá řešení, které se jim nepodaří v grafickém řešení najít. Řešení vzniklého rozporu nechávám nejdříve na nich, mnozí na svoji chybu přijdou. Při kontrole příkladu 4 je třeba upozornit na prázdné kolečko pro $x = 1$ i na fakt, že funkce, která vypadala jako lineární lomená se ve skutečnosti projevila jako konstantní (i když z omezeným definičním oborem).

Př. 1: Vyřeš rovnici $\frac{1}{x-1} = 1$.

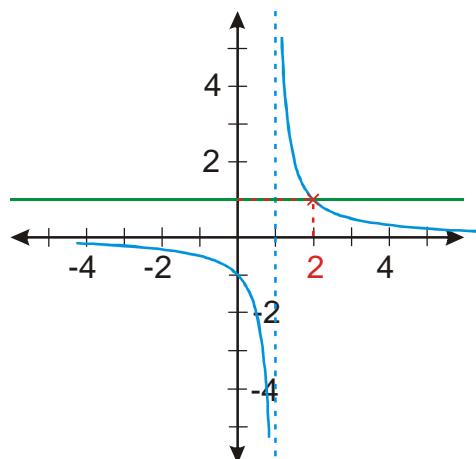
$$\begin{aligned}\frac{1}{x-1} &= 1 \quad / \cdot (x-1) \quad \text{podmínka: } x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \\ 1 &= x-1 \\ x &= 2 \\ K &= \{2\}\end{aligned}$$

Proč podmínka?
Nesmíme dělit nulou

Teď zkusíme použít grafy:

Př. 2: Vyřeš graficky rovnici $\frac{1}{x-1} = 1$.

Hledám průsečíky grafů funkcí $y_1 = \frac{1}{x-1}$ a $y_2 = 1$.



Z grafů je vidět, že podmínku píšeme proto, že funkce na levé straně nemá pro $x=1$, žádnou hodnotu a tudíž nemůžeme porovnávat hodnotu levé funkce s hodnotou pravé funkce.

Pedagogická poznámka: Někteří studenti nakreslí graf funkce $y = \frac{1}{x-1} - 1$ a hledají jeho nulové hodnoty.

Př. 3: Vyřeš rovnici $\frac{2x-2}{x-1} = 1$.

$$\frac{2x-2}{x-1} = 1 \quad /:(x-1) \quad \text{podmínka: } x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$$

$$2x-2 = x-1$$

$$x = 1$$

$K = \emptyset$ - hodnotu 1 pro x zakazuje podmínka

Jak je to možné, že vyšla zakázaná hodnota?

$x = 1$ je řešením rovnice $2x-2 = x-1$

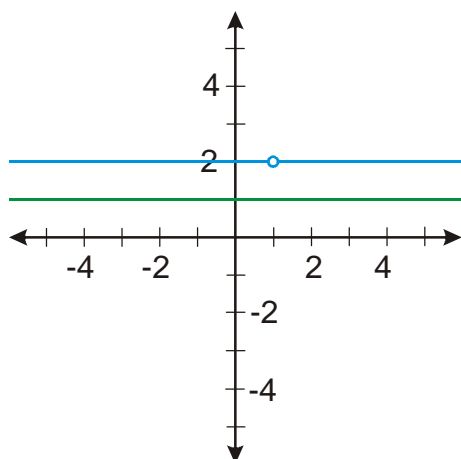
rovnici $\frac{2x-2}{x-1} = 1$, můžeme na rovnici $2x-2 = x-1$ pouze, když $x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$.

Podmínka je důležitá!

Př. 4: Vyřeš graficky rovnici $\frac{2x-2}{x-1} = 1$.

Hledám průsečíky grafů funkcí $y_1 = \frac{2x-2}{x-1}$ a $y_2 = 1$.

Předpis první funkce musíme upravit $y_1 = \frac{2x-2}{x-1} = 2 \left(\frac{x-1}{x-1} \right) = 2 \quad x \neq 1$



Oba grafy se neprotínají, rovnice nemá řešení.

Př. 5: Vyřeš nerovnici $\frac{1}{x-1} \leq 1$.

$$\frac{1}{x-1} \leq 1 \quad \text{podmínka: } x \neq 1$$

- potřebuju násobit výrazem $(x-1)$, který může měnit znaménko \Rightarrow musím řešení rozdělit na dva intervaly

$$x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$$

$$1) \ x \in (-\infty; 1) \quad (x=1 \text{ nezahrnuji, je vyloučené podmínkou})$$

$$1 \geq x-1 \quad (\text{násobím záporným výrazem - otočení znaménka})$$

$$2 \geq x$$

$$K_1 = (-\infty; 1)$$

$$2) \ x \in (1; \infty)$$

$$1 \leq x-1$$

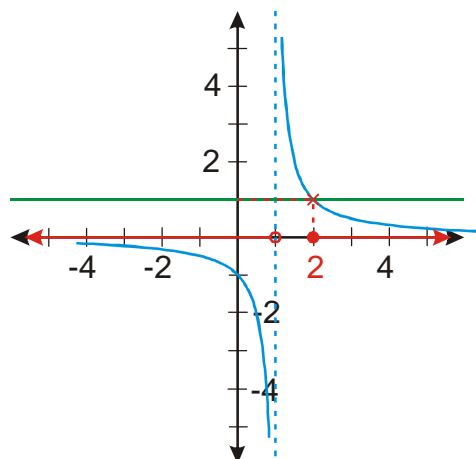
$$2 \leq x$$

$$K_2 = \langle 2; \infty$$

$$K = K_1 \cup K_2 = (-\infty; 1) \cup \langle 2; \infty$$

Př. 6: Vyřeš graficky nerovnici $\frac{1}{x-1} \leq 1$.

Zjišťuji, kdy je graf funkce $y_1 = \frac{1}{x-1}$ pod grafem funkce $y_2 = 1$.



$$K = (-\infty; 1) \cup \langle 2; \infty \rangle$$

Př. 7: Nakresli graf funkce $y = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}$.

Zdánlivě úplně neznámý typ funkce. Zkusíme výraz upravit:

$$y = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} \quad x \neq 0$$

$$y = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{\frac{x-1}{x}} = 1 + \frac{x}{x-1} = 1 + \frac{x-1+1}{x-1} = 1 + \frac{x-1}{x-1} + \frac{1}{x-1} = 1 + 1 + \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-1} + 2$$

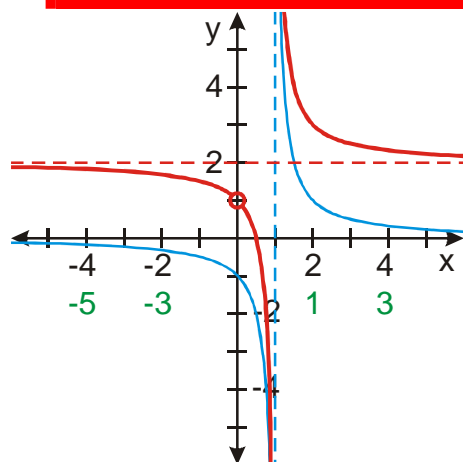
To nakreslit dokážeme. Platí: $y = \frac{1}{x-1} + 2 = f(x-1) + 2$

Zvolím x

Vypočtu $x-1$

Nakreslím funkci $y = f(x-1) = \frac{1}{x-1}$

Nakreslím funkci $y = f(x-1) + 2 = \frac{1}{x-1} + 2$



Pozor: Kvůli původnímu předpisu platí $x \neq 0 \Rightarrow$ naše funkce nemůže mít hodnotu pro $x = 0$.

Funkce $y = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}$ a funkce $y = \frac{1}{x-1} + 2$ nejsou to samé, mají různé definiční obory.

Pedagogická poznámka: Většina studentů přijde na nutnost úpravy předpisu, ale zapomenout vyloučit $x = 0$ z definičního oboru. Nakreslím na tabuli graf funkce $y = \frac{1}{x-1} + 2$ a řeknu studentům, že to není správný výsledek (ale že také není úplně špatný).

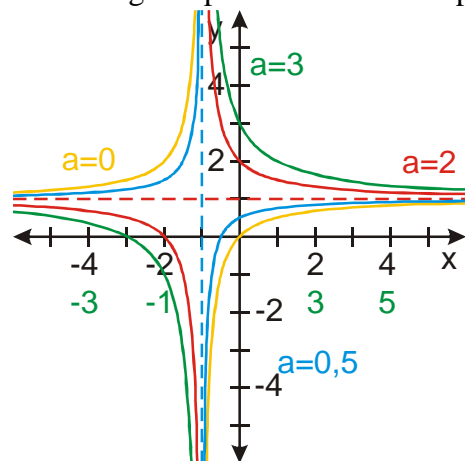
Př. 8: Zjisti, jak ovlivňuje hodnota parametru a graf funkce $y = \frac{x+a}{x+1}$.

Upravíme si předpis funkce: $y = \frac{x+a}{x+1} = \frac{x+1-1+a}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} + \frac{-1+a}{x+1} = \frac{a-1}{x+1} + 1$

Parametr a vystupuje v předpisu funkce v čitateli \Rightarrow ovlivňuje jak moc je funkce „přimáčknutá“ k asymptotám

Pro $a = 1$ získáme funkci $y = \frac{1-1}{x+1} + 1 = 1$

Několik grafů pro několik hodnot parametru a :



Než definitivně skončíme musíme si poradit s jedním nedodělkem.

Tato hodina je poslední o lineárně lomených funkcích, ale zatím jsme ještě sestavili obecnou definici lineární lomené funkce. Něco jako definice kvadratické funkce (kvadratická funkce je každá funkce, kterou je možné zapsat ve tvaru $y = ax^2 + bx + c$, kde $a \neq 0$).

Návrh: $y = \frac{ax+b}{cx+d}$.

Není třeba přidat nějaké podmínky?

$c \neq 0$ - aby x nezmizelo ze jmenovatele

Ještě jeden problém, zlomek se nesmí zkrátit jako u funkce $y = \frac{2x-2}{x-1} \Rightarrow$ číselník a jmenovatel nesmí být možné zkrátit.

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)} \Rightarrow x+\frac{b}{a} \neq x+\frac{d}{c}$$

$$\frac{b}{a} \neq \frac{d}{c}$$

Násobíme ac za předpokladu, že je různé od nuly!

$$bc \neq da$$

Jaký bude definiční obor?

Vše, pokud ve jmenovateli není nula $\Rightarrow cx+d \neq 0 \Rightarrow x \neq -\frac{d}{c}$.

Lineární lomená funkce je každá funkce na množině $R - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ zadaná ve tvaru

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}, \text{ kde } c \neq 0 \text{ a } bc \neq da.$$

Pedagogická poznámka: Jedním z cílů hodiny je vyzkoušet (a studentům to říkám), jaký mají postřeh na zajímavé věci. Jde hlavně o to jestli si všimnou v příkladu 4 zmenšení definičního oboru (použito znovu v příkladu 6) a vykrácení zlomku (použito při sestavování definice lineárně lomené funkce). Aby na sestavování definice zbylo dost času je nutné skončit s počítáním příkladů nejpozději 5 minut před koncem hodiny (spíše však dříve).

Př. 9: Petáková:
 strana 58/cvičení 11 b) c)
 strana 58/cvičení 13
 strana 58/cvičení 15 c) d)

Shrnutí: Graf lineární lomené funkce můžeme využít při řešení některých rovnic nebo nerovnic.