

2.7.2 Mocninné funkce se záporným celým mocnitelem

Předpoklady: 2701

Mocninné funkce se záporným celým mocnitelem: $y = x^{-1}; y = x^{-2}; y = x^{-3}; \dots$. Co to znamená?

$$y = x^{-1} = \frac{1}{x}, \quad y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}, \quad y = x^{-3} = \frac{1}{x^3} \dots$$

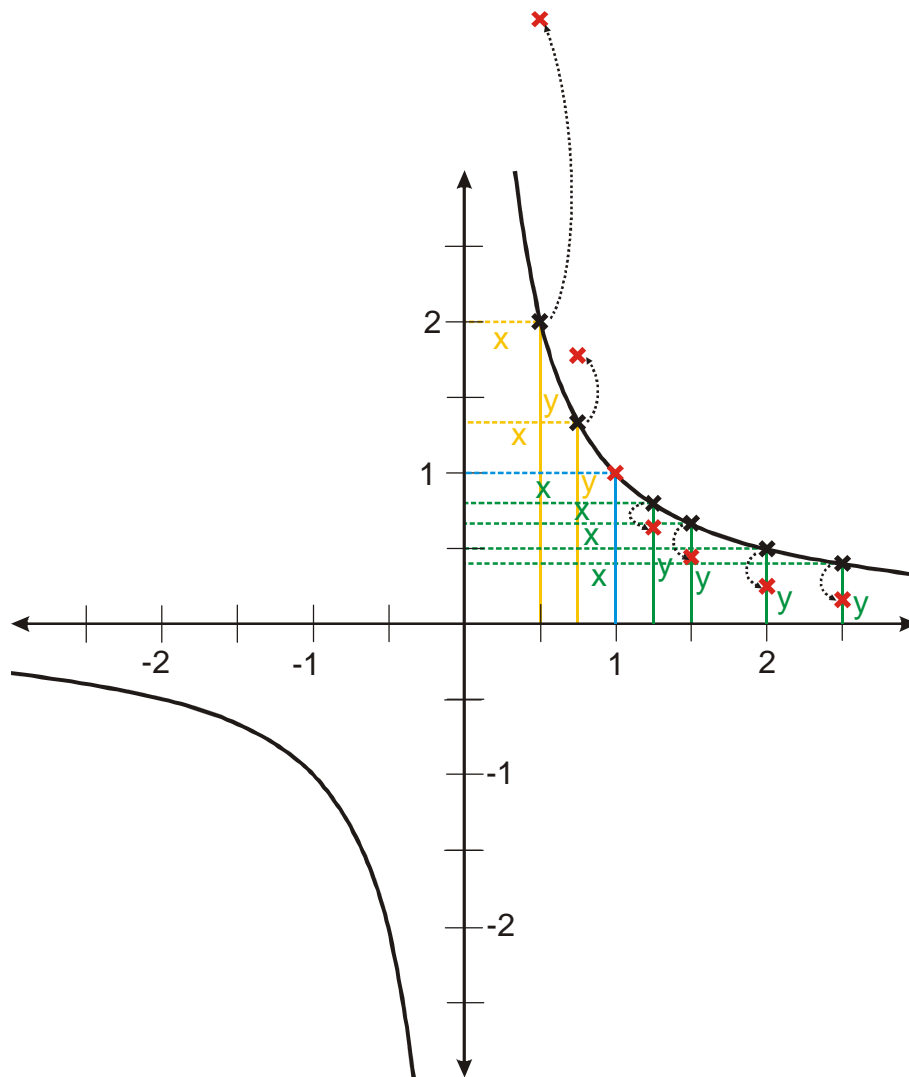
Pedagogická poznámka: Nechávám studenty, aby sami doplnili, čemu se rovná x^{-1} . Pokud se najde někdo, kdo si nepamatuje význam záporné mocniny, je třeba ho nemilosrdně (exemplárně) ztrestat.

Pro velký úspěch uvedeme opakování z minulé hodiny. Podíváme se, co se děje, když začneme v grafu dělit x .

Př. 1: Pomocí grafu funkce $y = \frac{1}{x}$ sestroj graf funkce $y = \frac{1}{x^2}$.

Funkci $y = \frac{1}{x^2}$ můžeme vyjádřit pomocí funkce $y = \frac{1}{x}$ takto: $y = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} : x \Rightarrow$ tedy hodnoty funkce $y = \frac{1}{x}$ dělíme v každém bodě ještě jednou hodnotou x .

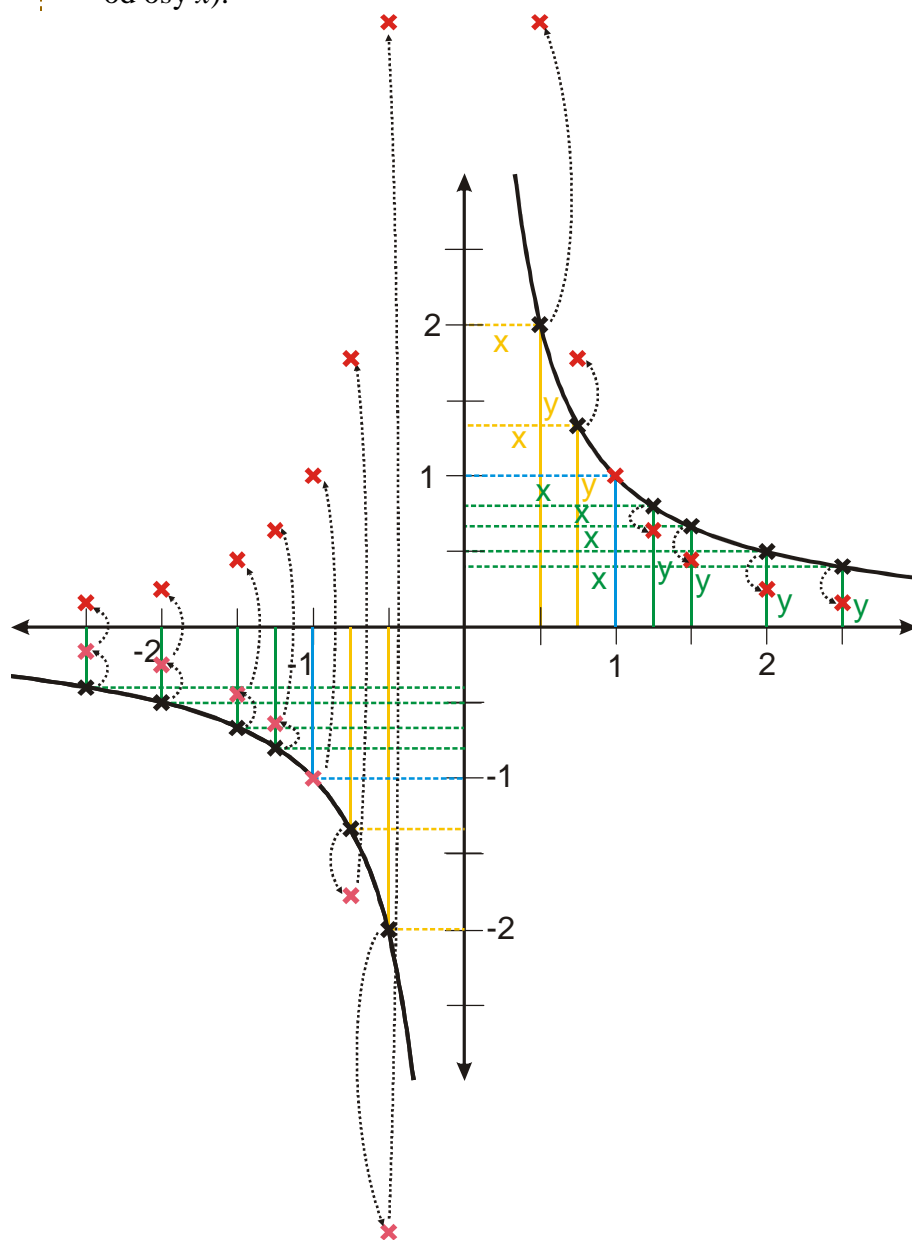
- Pro $x = 1$ je hodnota $y = 1$ (svislá plná modrá čára), dělíme hodnotou $x = 1$ (vodorovná přerušovaná modrá čára), platí $1 : 1 = 1 \Rightarrow$ nová hodnota $y_n = 1$. Pro $x = 1$ se hodnota nezmění (červený křížek o souřadnicích $[1;1]$ - první bod nového grafu).
- Další body grafu $y = \frac{1}{x^2}$ napravo od bodu $[1;1]$. Hodnoty y v každém místě (svislá plná zelená čára) dělíme hodnotou $x > 1$ (vodorovná přerušovaná zelená čára). Při dělení číslem větším než jedna se hodnota zmenší (proto jsou červené křížky níž než původní černé). Čím je číslo, kterým dělíme, větší, tím víc se hodnota zmenší (červené křížky jsou čím více napravo tím níže pod původními černými).



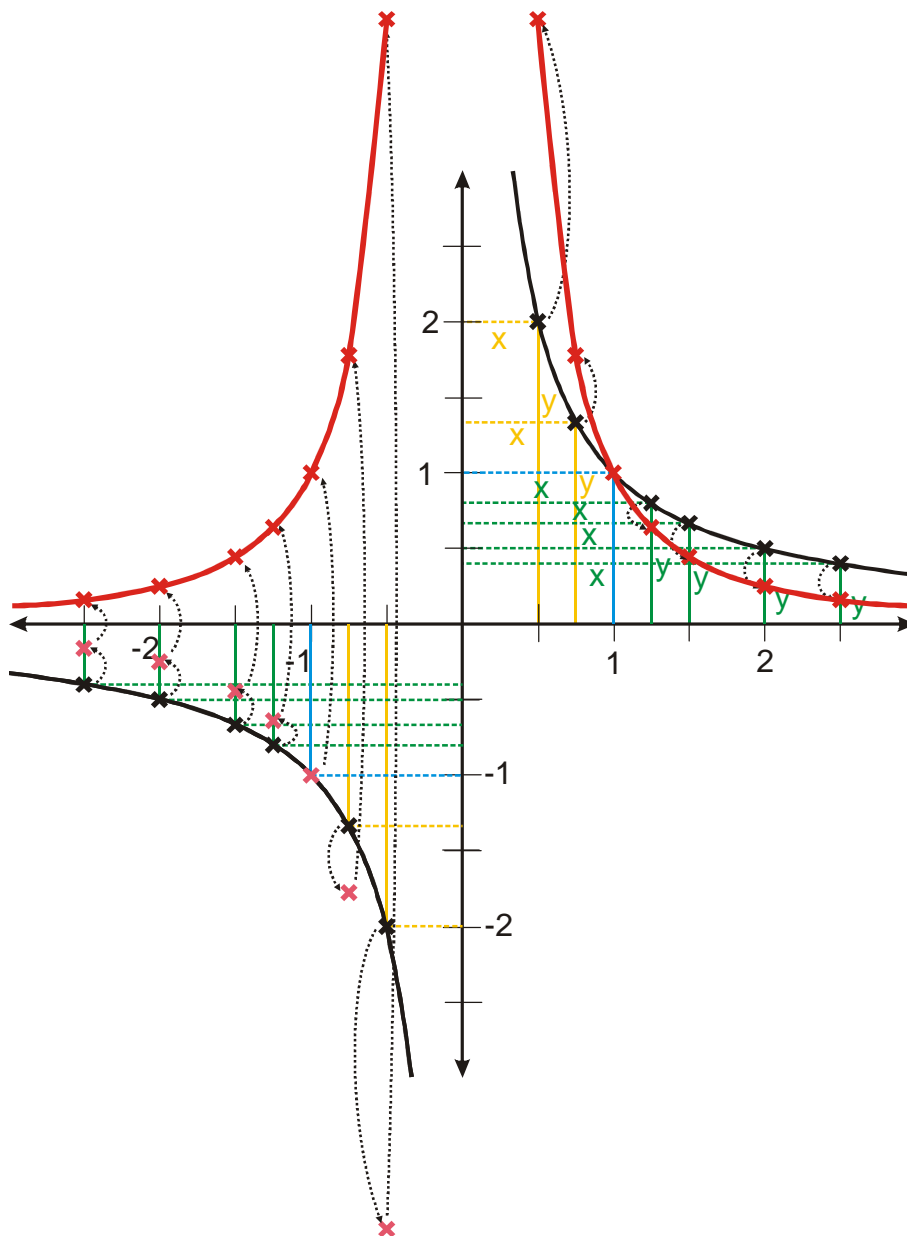
Nyní sestrojíme levou část grafu:

- Pro $x = -1$ je hodnota $y = -1$ (svislá plná modrá čára), dělíme hodnotou $x = -1$ (vodorovná přerušovaná modrá čára), platí $-1 : (-1) = 1$. Nová hodnota $y_n = 1$. Pro $x = -1$ se hodnota změní na opačné číslo (červený křížek o souřadnicích $[1; 1]$ - první bod levé strany nového grafu).
- Body grafu $y = \frac{1}{x}$ nalevo od bodu $[-1; -1]$. Hodnoty y v každém místě (svislá plná zelená čára) dělíme hodnotou $x < -1$ (vodorovná přerušovaná zelená čára). Při dělení číslem menším než minus jedna se hodnota v absolutní hodnotě zmenší (proto jsou růžové křížky výš a blíže k ose x než původní černé), ale protože jsou obě čísla v podílu záporná, výsledek má kladné znaménko, takže se překloupí nad osu x (červený křížek). Čím je číslo, kterým dělíme, menší (a v absolutní hodnotě větší), tím víc se hodnota v absolutní hodnotě zmenší (růžové křížky jsou čím více nalevo tím výše nad původními černými), po převrácení pak zmenší (červené jsou čím více nalevo tím níže).
- Pokračujeme vpravo od bodu $[-1; -1]$. Hodnoty y v každém místě (svislá plná žlutá čára) dělíme hodnotou $-1 < x < 0$ (vodorovná přerušovaná žlutá čára). Při dělení číslem v absolutní hodnotě menším než jedna se hodnota v absolutní hodnotě zvětší

(proto jsou růžové křížky níž než původní černé a dále od osy x), protože jsou obě čísla v podílu záporná, výsledek je kladný a křížek se převrátí nad osu x . Čím je číslo, kterým dělíme, v absolutní hodnotě menší, tím víc se hodnota v absolutní hodnotě zvětší (růžové křížky jsou čím více vpravo tím níže pod původními černými a dále od osy x).



Spojením získaných bodů získáme graf funkce $y = \frac{1}{x^2}$.



Pedagogická poznámka: Přestože kreslení předchozího grafu je pro studenty po předchozí hodině snazší než kreslení grafu $y = x^2$ z grafu funkce $y = x$, řešíme předchozí příklad napůl společně. Všechny ostatní příklady s grafy, ale řeší studenti samostatně.

Př. 2: Pomocí předchozího příkladu odhadni, jak se budou měnit s rostoucím n grafy funkcí

$$y = \frac{1}{x^n}.$$

- Všechny grafy budou procházet bodem $[1;1]$ (dělení jednou se hodnota nezmění).
- Pro $x > 1$ dělíme čísla většími než jedna, hodnoty funkce se po každém dělení zmenší. Čím větší bude n tím víc, bude graf funkce nalepený na osu x .
- Pro $0 < x < 1$ dělíme čísla menšími než jedna, hodnoty funkce se po každém dělení zvětší. Čím větší bude n tím strmější bude graf a tím větší bude mít hodnoty.

- Pro záporná čísla bude mít graf stejný tvar jako pro kladná, pro lichá n bude ležet pod osou x , pro sudá n bude ležet nad osou x .

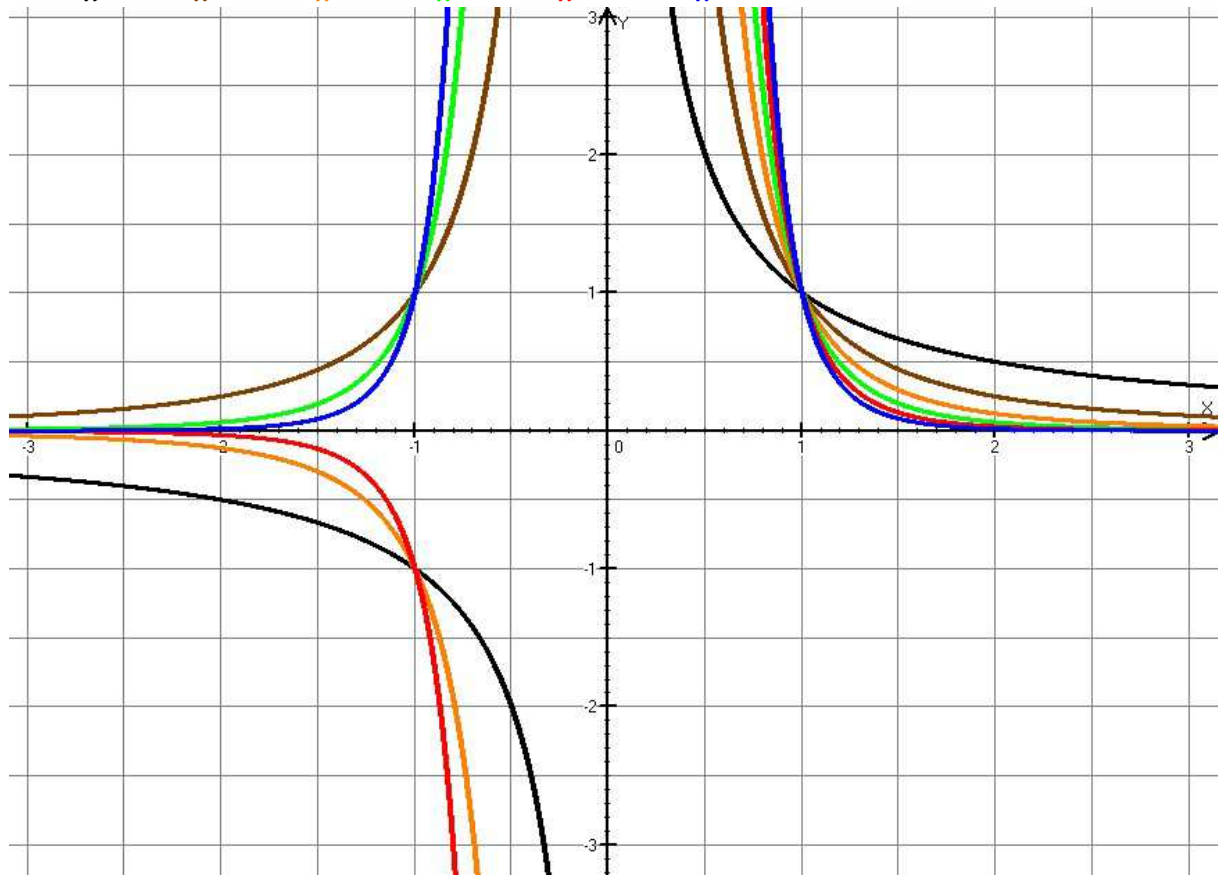
Pedagogická poznámka: Připomeňte studentům před dalším příkladem, jaké měli v minulé hodině problémy s tím, aby se jim čím dál strmější grafy někam vešly. Jde o dobré cvičení schopnosti rozvržení si práce.

Př. 3: Pomocí postupů popsaných v této kapitole nakresli do jednoho obrázku grafy funkcí:

$$y_1 = \frac{1}{x}, y_2 = \frac{1}{x^2}, y_3 = \frac{1}{x^3}, y_4 = \frac{1}{x^4}, y_5 = \frac{1}{x^5} \text{ a } y_6 = \frac{1}{x^6}.$$

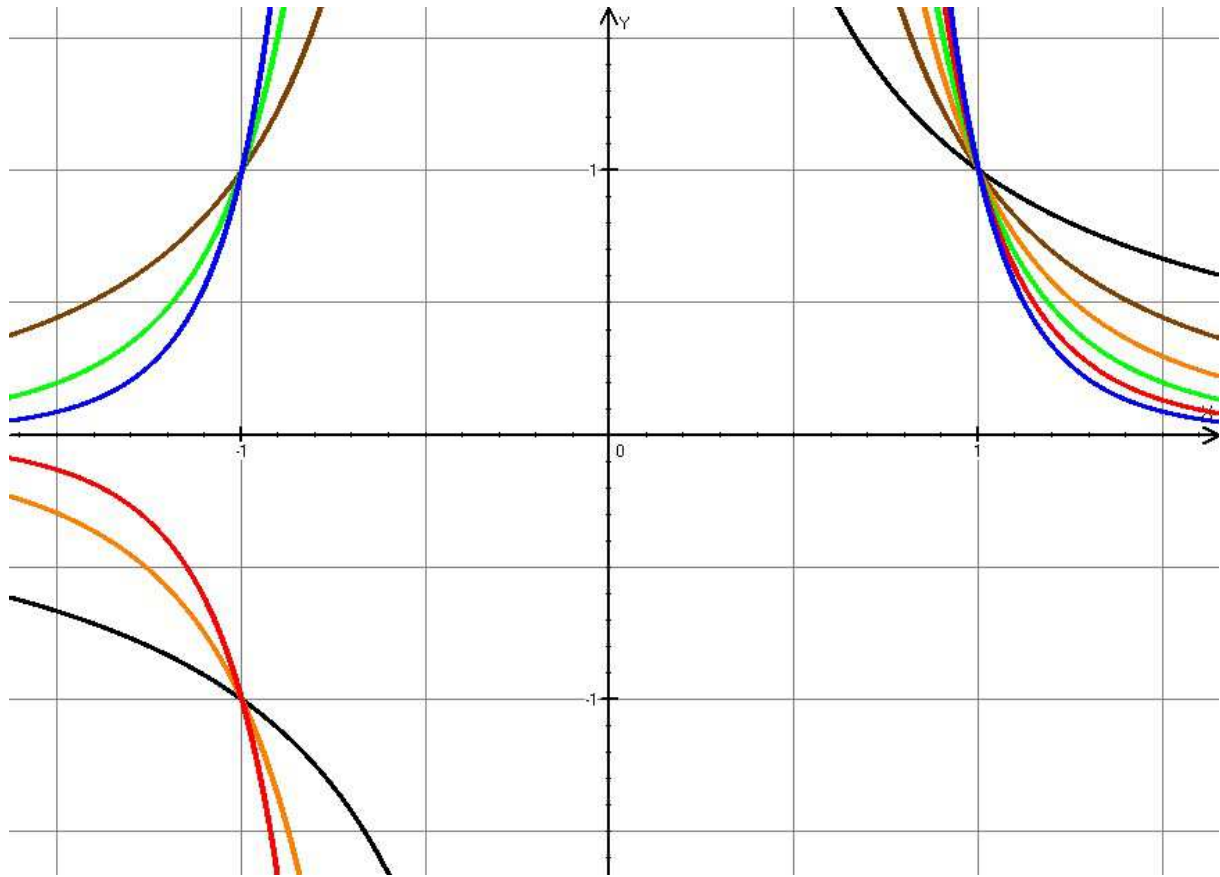
Grafy požadovaných funkcí jsou nakresleny stejnými barvami jako jejich předpisy:

$$y_1 = \frac{1}{x}, y_2 = \frac{1}{x^2}, y_3 = \frac{1}{x^3}, y_4 = \frac{1}{x^4}, y_5 = \frac{1}{x^5} \text{ a } y_6 = \frac{1}{x^6}.$$



Protože nejzajímavější je situace v okolí nuly uděláme si detail obrázku:

$$y_1 = \frac{1}{x}, y_2 = \frac{1}{x^2}, y_3 = \frac{1}{x^3}, y_4 = \frac{1}{x^4}, y_5 = \frac{1}{x^5} \text{ a } y_6 = \frac{1}{x^6}.$$



Z obrázků je zřejmé, že grafy s vyšší mocninou postupně čím dál více naléhají na osu x a jsou čím dál strmější. Čím dál více se podobají písmenu L.

Všechny grafy prochází bodem $[1, 1]$.

Výsledky odpovídají závěrům z předchozího příkladu.

Př. 4: Podle obrázků rozříd' mocninné funkce se záporným mocnitelem do dvou skupin a urči vlastnosti všech funkcí v každé skupině ($D(f)$, $H(f)$, rostoucí, klesající, sudá, lichá, omezená).

Z obrázků je zřejmé, že jednu skupinu tvoří funkce: $y_1 = \frac{1}{x}$, $y_3 = \frac{1}{x^3}$, $y_5 = \frac{1}{x^5}$, druhou

funkce: $y_2 = \frac{1}{x^2}$, $y_4 = \frac{1}{x^4}$, $y_6 = \frac{1}{x^6}$. Pro zařazení do skupiny je rozhodující, zda je mocnitél sudý nebo lichý.

Vlastnosti mocninných funkcí se záporným celým mocnitelem ($y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}; n \in \mathbb{N}$)

n je liché

$$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$H(f) = \mathbb{R} - \{0\}$$

Funkce není omezená.

Funkce je lichá.

Funkce není rostoucí v žádném intervalu.

Funkce je klesající $(-\infty; 0)$ a $(0; \infty)$.

n je sudé

$$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$H(f) = (0; \infty)$$

Funkce je zdola omezená.

Funkce je sudá.

Funkce je rostoucí v intervalu $(-\infty; 0)$.

Funkce je klesající v intervalu $(0; \infty)$.

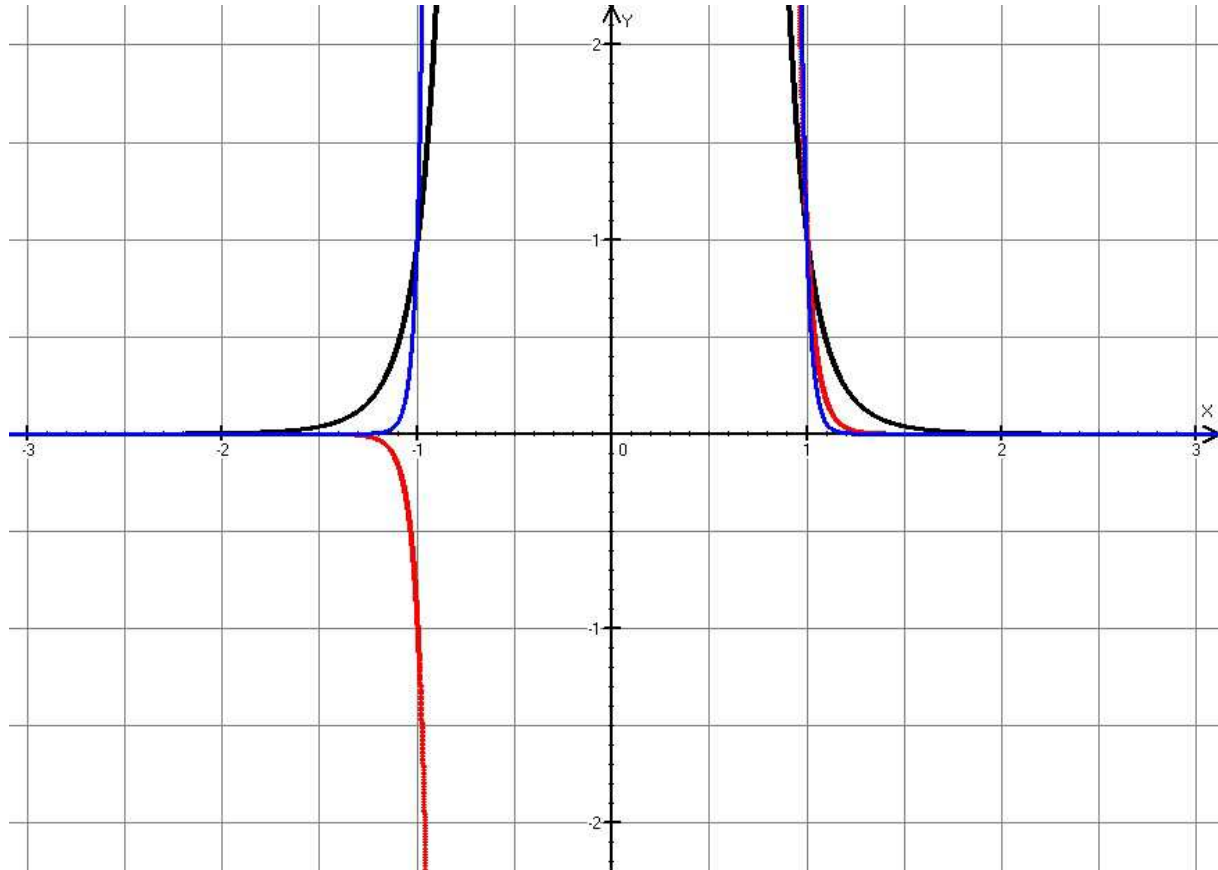
Graf funkce prochází bodem $[1;1]$.

S rostoucím hodnotou mocnitele n se graf funkce přibližuje dvěma dvojicím navzájem kolmých polopřímek.

Př. 5: Nakresli do jednoho obrázku grafy funkcí $y_1 = \frac{1}{x^8}$, $y_2 = \frac{1}{x^{19}}$, $y_3 = \frac{1}{x^{30}}$.

Grafy požadovaných funkcí jsou nakresleny stejnými barvami jako jejich předpisy:

$$y_1 = \frac{1}{x^8}, \quad y_2 = \frac{1}{x^{19}}, \quad y_3 = \frac{1}{x^{30}}.$$

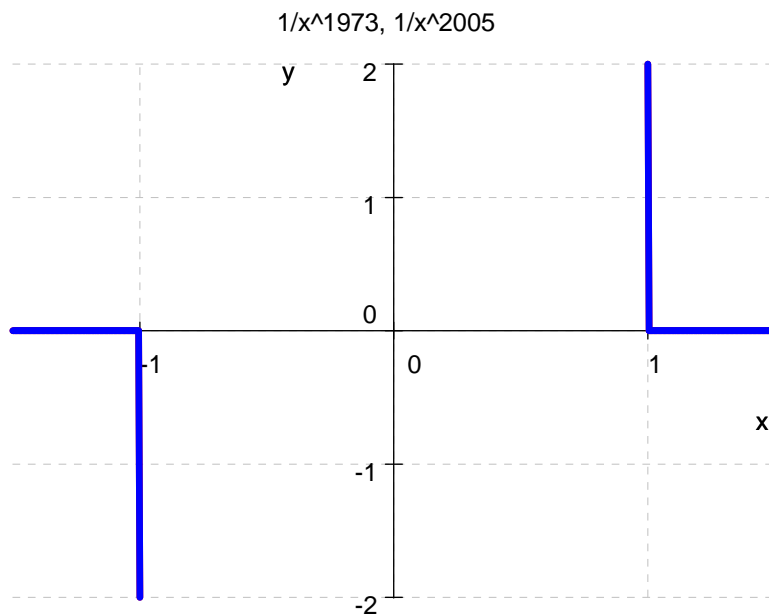


Poznámka: Z obrázku je vidět, že u vysokých mocnin grafy téměř splývají. V takových případech je budeme kreslit pouze schematicky, tak abychom mohli navzájem porovnat hodnoty obou funkcí.

Př. 6: Vyřeš graficky nerovnici $\frac{1}{x^{1973}} \geq \frac{1}{x^{2005}}$.

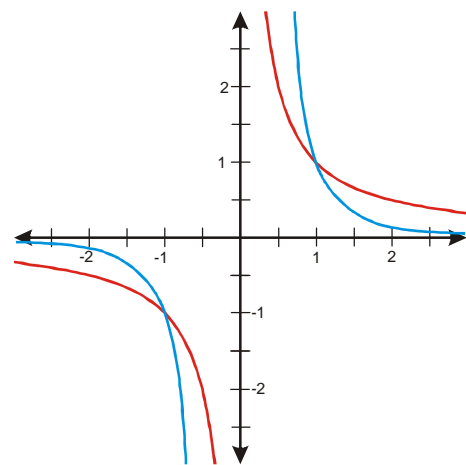
Grafy funkcí reprezentujících obě strany nerovnice jsou nakresleny stejnými barvami jako jejich předpisy:

$$y_1 = \frac{1}{x^{1973}}, \quad y_2 = \frac{1}{x^{2005}}.$$



Z obrázku je zřejmé, že obě funkce mají natolik „obdélníkový tvar“, že se ve skutečnosti téměř překrývají a při přesném nakreslení pomocí počítačového programu je nemůžeme rozlišit.

Použijeme schematický obrázek: $y_1 = \frac{1}{x^{1973}}$, $y_2 = \frac{1}{x^{2005}}$.



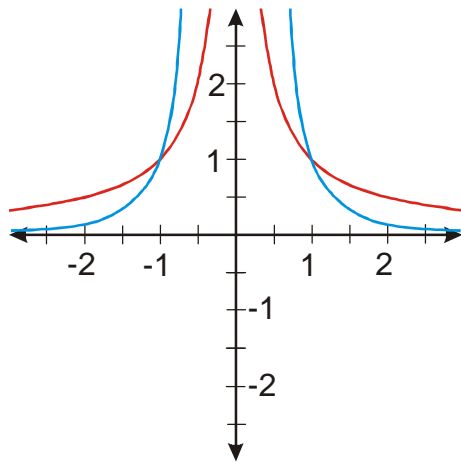
Obě funkce mají stejný tvar, funkce $y_2 = \frac{1}{x^{2005}}$ je více pravouhlá.

Hledáme intervaly, ve kterých je graf funkce $y_1 = \frac{1}{x^{1973}}$ výše, tedy kde je červená čára nad modrou. Z obrázku je vidět, že řešením je množina $K = \langle -1; 0 \rangle \cup \langle 1; \infty \rangle$.

Pedagogická poznámka: Následující příklad většina studentů nestihne, což není žádný problém. S podobnými příklady se setkají ještě příští hodinu.

Př. 7: Vyřeš graficky nerovnici $\frac{1}{x^8} \leq \frac{1}{x^{10}}$.

Nakreslíme schématický obrázek funkcí: $y_1 = \frac{1}{x^8}$, $y_2 = \frac{1}{x^{10}}$.



Obě funkce mají stejný tvar, funkce $y_2 = \frac{1}{x^{10}}$ je více pravoúhlá.

Hledáme intervaly, ve kterých je graf funkce $y_1 = \frac{1}{x^8}$ níže, tedy kde je červená čára pod modrou. Z obrázku je vidět, že řešením je množina $K = \langle -1; 0 \rangle \cup \langle 0; 1 \rangle$.

Shrnutí: V grafu můžeme také přibližně „dělit“ aktuální hodnotou x a tím snadno získat grafy mocninných funkcí s celým záporným mocnitelem. Situace s jejich grafy je podobná situaci s grafy s přirozeným mocnitelem.