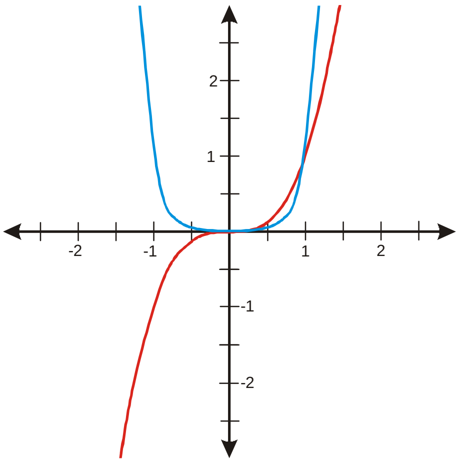
2.7.3 Použití grafů základních mocninných funkcí

Předpoklady: 2701, 2702

Pedagogická poznámka: Jedním z nejdůležitějších cílů hodiny je, aby si studenti kreslili obrázky, které jim při řešení příkladů doopravdy pomohou. Pokud takový jejich obrázek není, přesvědčuji je, aby se snažili si opravdu ulehčit situaci a ne jen zaplňovat papír v sešitu.

Př. 1: Pomocí grafu vyřeš nerovnici $x^{1973} \geq x^{2006}$.

Nakreslíme schématický obrázek situace $y_1 = x^{1973}$, $y_2 = x^{2006}$.



Funkce $y_1 = x^{1973}$ má tvar převráceného S, je méně obdélníková (má menší mocnitel).

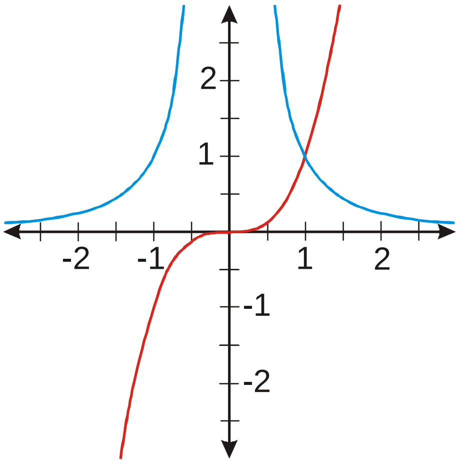
Funkce $y_2 = x^{2006}$ má tvar U, je více obdélníková (má větší mocnitel).

Z obrázku je vidět, že řešením je interval $K = \langle 0;1 \rangle$.

Pedagogická poznámka: Část studentů začne místo zadaného příkladu řešit nerovnici $x^{-1973} \geq x^{-2006}$. Jde o hezkou ukázku toho, jak málo čtou studenti zadání a jak velkou mají tendenci opakovat poslední zadání.

Př. 2: Pomocí grafu vyřeš nerovnici $x^{313} \leq x^{-334}$.

Nakreslíme schématický obrázek situace $y_1 = x^{313}$, $y_2 = x^{-334}$.



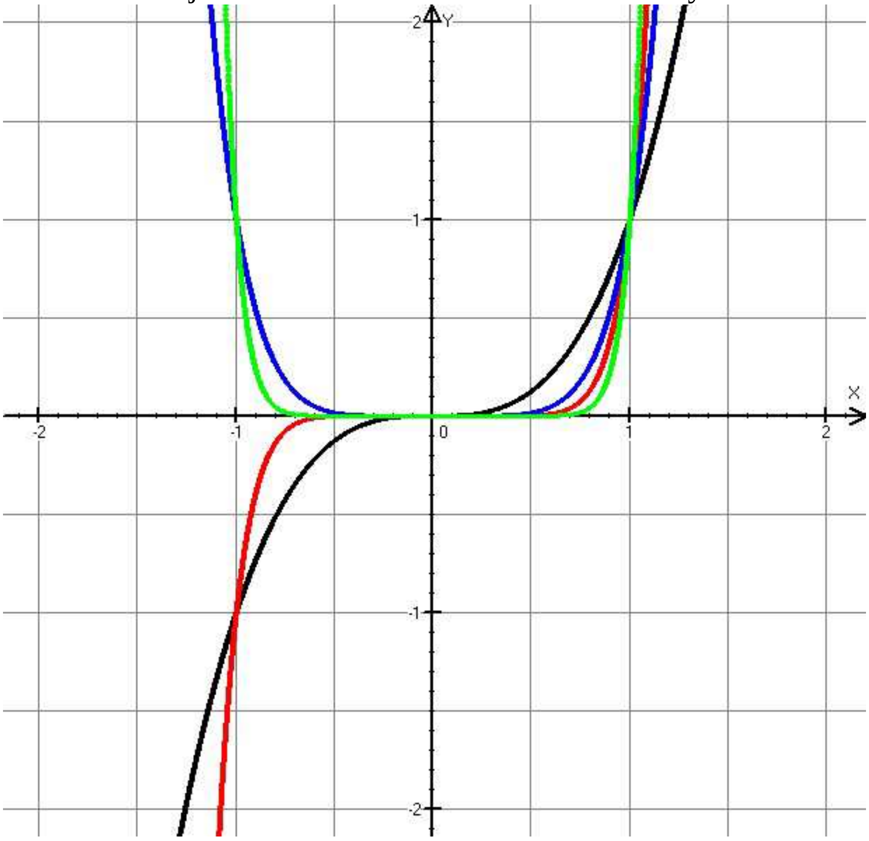
Řešíme nerovnici $x^{313} \le x^{-334}$ $\Rightarrow$ hledáme v grafu místa, kdy je modrá čára nad červenou $\Rightarrow$ $K = (-\infty;0) \cup (0;1\rangle$.

Pedagogická poznámka: Častou chybou je zahrnutí nuly do množiny řešení. Snažím se to neprozrazovat, jenom opakuji, že interval $(-\infty;1\rangle$ není řešením.

Poznámka: Řešení předchozího příkladu není možné zapsat jedním intervalem $K = (-\infty;1\rangle$, protože pro nulu není možné spočítat hodnotu výrazu 0^{-334} a tudíž tato hodnota nemůže být větší než 0^{313}.

Pedagogická poznámka: Většinu exponentů v této hodině tvoří různé letopočty. Můžete přezkoušet studenty z dějepisu. Například předchozí dva: 313 – Milánský edikt císaře Konstantina, 334 př. nl. – počátek tažení Alexandra Velikého proti Perské říši. To že si studenti na tyto dvě události nevzpomenou není tak tragické jako to, že si ani přibližně nepamatují, co se v té době dělo a nebo navrhují naprosto nesmyslné události.

Př. 3: Na následujícím obrázku jsou grafy funkcí $y=x^3$, $y=x^9$, $y=x^{14}$ a $y=x^n$. Urči, kterou barvou je zobrazena která funkce. Jaké hodnoty může dosahovat číslo n?



Červený a černý graf – funkce s lichou mocninou, červená je více „hranatá“. $\Rightarrow$

- $y=x^3$ - černá barva
- $y=x^9$ - červená barva

Modrý a zelený graf – funkce se sudou mocninou, pouze jedna z nich je „hranatější“ než červená funkce $y=x^9$. $\Rightarrow$

$y=x^{14}$ - zelená barva

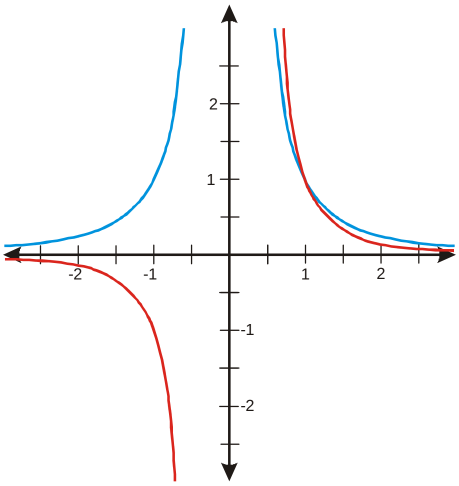
$y=x^n$ - modrá barva $\Rightarrow$ n je sudé číslo, platí $3<n<9$.

$n\in\{4;6;8\}$

Př. 4: Urči všechna přirozená čísla n taková, aby řešením nerovnice $\frac{1}{x^n}\geq\frac{1}{x^{14}}$ byl interval $(0;1\rangle$.

Nakreslíme si schematický graf funkce $y=\frac{1}{x^{14}}$. Do obrázku dokreslíme graf funkce $y=\frac{1}{x^n}$.

Protože je řešením nerovnice $\frac{1}{x^n}\geq\frac{1}{x^{14}}$ má být pouze interval $(0;1\rangle$, musí být červená čára nad modrou pouze v intervalu $(0;1\rangle$.

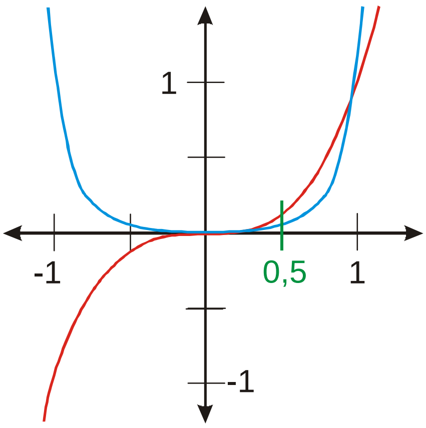


Z obrázku je vidět, že:

- *n* musí být liché (aby byl červený graf v levé polovině obrázku pod osou *x*),
- *n* musí být větší než 14 (aby byl červený graf v pravé polovině obrázku „pravoúhlejší“ než graf modrý),

$\Rightarrow \; n \in \{15;17;19;21;...\}$.

Př. 5: Pomocí grafů mocninných funkcí rozhodni, které z čísel je větší: $0,5^{1973}$ a $0,5^{1990}$.



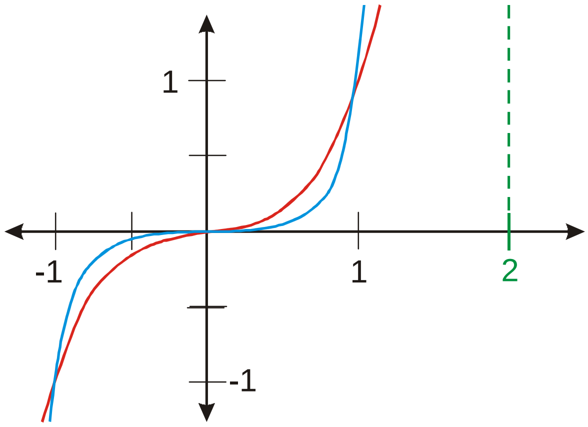
Grafy požadovaných funkcí jsou schematicky nakresleny stejnými barvami jako jejich předpisy: $y_1 = x^{1973}$, $y_2 = x^{1990}$.

Z obrázku je vidět, že $0,5^{1973} > 0,5^{1990}$.

Řešení úvahou: $0,5^{1973} = \underbrace{0,5 \cdot 0,5 \cdot ... \cdot 0,5}_{1973 krát}$. Abychom získali $0,5^{1990}$ musíme číslo $0,5^{1973}$ ještě několikrát vynásobit 0,5 (a tím i zmenšit) $\Rightarrow$ platí: $0,5^{1973} > 0,5^{1990}$

Př. 6: Rozhodni pomocí grafu i úvahou, které z čísel 2^{1973} a 2^{1989} je větší.

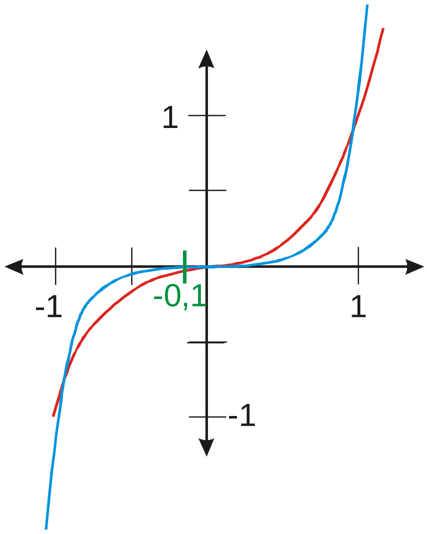
Grafy potřebných funkcí jsou schematicky nakresleny stejnými barvami jako jejich předpisy: $y_1 = x^{1973}$, $y_2 = x^{1989}$.



Z obrázku je vidět, že pro $x = 2$ je hodnota modré funkce větší $\Rightarrow$ $2^{1973} < 2^{1989}$.
Úvaha: $2^{1973} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{1973\,krát}$. Abychom získali 2^{1989}, musíme číslo 2^{1973} ještě několikrát vynásobit 2 (a tím i zvětšit) $\Rightarrow$ platí: $2^{1973} < 2^{1989}$.

Př. 7: Rozhodni pomocí grafu i úvahou, které z čísel $(-0{,}1)^{1973}$ a $(-0{,}1)^{1989}$ je větší.

Grafy požadovaných funkcí jsou schematicky nakresleny stejnými barvami jako jejich předpisy: $y_1 = x^{1973}$, $y_2 = x^{1989}$.

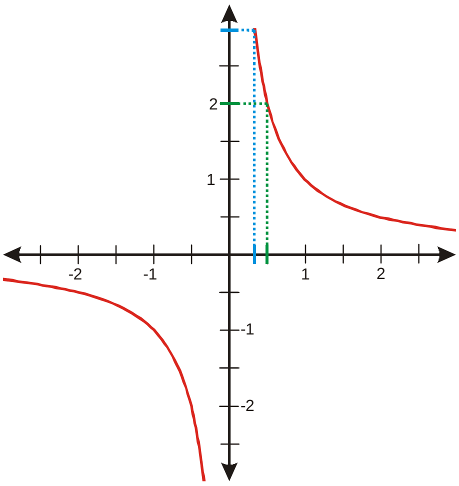


Z obrázku je vidět, že $(-0{,}1)^{1973} < (-0{,}1)^{1989}$.
Úvaha: Obě porovnávaná čísla jsou liché mocniny záporného čísla $\Rightarrow$ obě budou záporná.
$(-0{,}1)^{1973} = \underbrace{(-0{,}1) \cdot (-0{,}1) \cdot \ldots \cdot (-0{,}1)}_{1973\,krát}$. Abychom získali $(-0{,}1)^{1989}$, musíme číslo vlevo ještě několikrát vynásobit $(-0{,}1)$ (a tím i zmenšit jeho absolutní hodnotu) $\Rightarrow$ platí: $(-0{,}1)^{1973} < (-0{,}1)^{1989}$.

Pedagogická poznámka: Je zajímavé, že jen velmi málo studentů si všimne a využije pro řešení příkladu 7 stejný obrázek jako pro příklad 6.

Př. 8: Rozhodni pomocí grafu i úvahou, které z čísel $\left(\frac{1}{2}\right)^{-31}$ a $\left(\frac{1}{3}\right)^{-31}$ je větší.

Obě porovnávaná čísla můžeme zobrazit pomocí funkce $y = x^{-31}$.



Z obrázku je vidět, že funkce $y = x^{-31} = \frac{1}{x^{31}}$ je v intervalu $(0;\infty)$ klesající. Protože platí

$\left(\frac{1}{2}\right) > \left(\frac{1}{3}\right)$, musí platit $\left(\frac{1}{2}\right)^{-31} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-31}$.

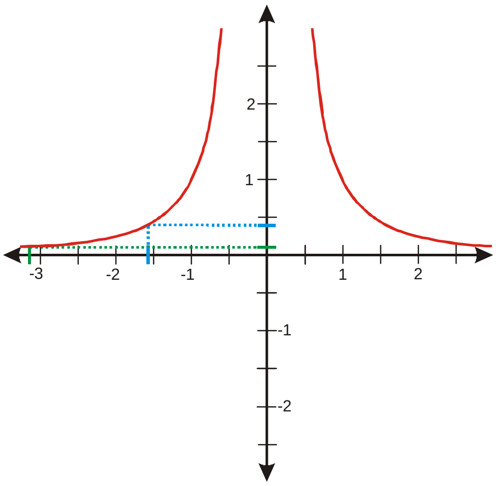
Úvaha: Platí $\left(\frac{1}{2}\right)^{-31} = 2^{31}$ a $\left(\frac{1}{3}\right)^{-31} = 3^{31}$. Přirozená mocnina z většího kladného čísla je větší

$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-31} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-31}$

Pedagogická poznámka: Někteří studenti mají problém s grafickým řešením předchozího příkladu, protože si neuvědomují, že jedna funkce jim pro jeho vyřešení stačí a pořád hledají druhý graf.

Př. 9: Rozhodni pomocí grafu i úvahou, které z čísel $(-\pi)^{-140}$ a $\left(-\frac{\pi}{2}\right)^{-140}$ je větší.

Obě porovnávaná čísla můžeme zobrazit pomocí funkce $y = x^{-140}$.

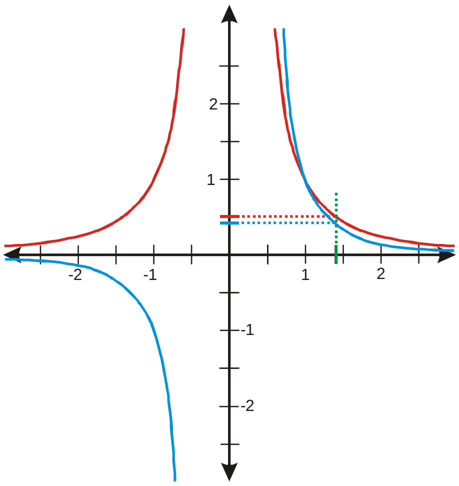


Z obrázku je vidět, že funkce $y = x^{-140} = \frac{1}{x^{140}}$ je v intervalu $(-\infty;0)$ rostoucí. Protože platí $(-\pi) < \left(-\frac{\pi}{2}\right)$, musí platit $(-\pi)^{-140} < \left(-\frac{\pi}{2}\right)^{-140}$.

Úvaha: Čísla $(-\pi)^{-140}$ a $\left(-\frac{\pi}{2}\right)^{-140}$ jsou sudé mocniny $\Rightarrow$ obě čísla jsou kladná. Číslo $(-\pi)^{-140}$ je záporná mocnina s větší absolutní hodnotou základu $\Rightarrow$ bude menší $\Rightarrow$ $(-\pi)^{-140} < \left(-\frac{\pi}{2}\right)^{-140}$.

Př. 10: Libovolným způsobem rozhodni, které z čísel je větší: $\left(\sqrt{2}\right)^{-334}$ a $\left(\sqrt{2}\right)^{-527}$.

Nakreslíme schematické grafy funkcí: $y_1 = x^{-334} = \frac{1}{x^{334}}$ a $y_2 = x^{-527} = \frac{1}{x^{527}}$.



Z obrázku je vidět, že pro $\sqrt{2}$ dosahuje větší hodnoty funkce $y_1 = x^{-334} = \frac{1}{x^{334}}$.

Platí: $\left(\sqrt{2}\right)^{-334} > \left(\sqrt{2}\right)^{-527}$.

Dodatek: Příklad je možné vyřešit i bez grafů funkce, když si uvědomíme, že číslo $\left(\sqrt{2}\right)^{-527}$ získáme z čísla $\left(\sqrt{2}\right)^{-334}$, mnohonásobným dělením číslem $\sqrt{2}$, které je větší než jedna. Po každém dělení číslem větším než jedna se hodnota zmenší a tedy $\left(\sqrt{2}\right)^{-334} > \left(\sqrt{2}\right)^{-527}$.

Př. 11: Libovolným způsobem rozhodni, které z čísel je větší: $(-3)^{-1263721889}$ a $(-3)^{-1263721888}$.

Číslo $(-3)^{-1263721889}$ je záporné (lichá mocnina záporného čísla), číslo $(-3)^{-1263721888}$ je kladné (sudá mocnina záporného čísla). První číslo je menší než nula, druhé je větší než nula, platí tedy $(-3)^{-1263721889} < (-3)^{-1263721888}$.

Př. 12: Petáková:
strana 57/cvičení 8 a) b) c) d) f) h)

Shrnutí: Grafy mocninných funkcí můžeme využít při řešení nerovnic nebo porovnávání mocnin.