2.7.4 Grafy mocninných funkcí

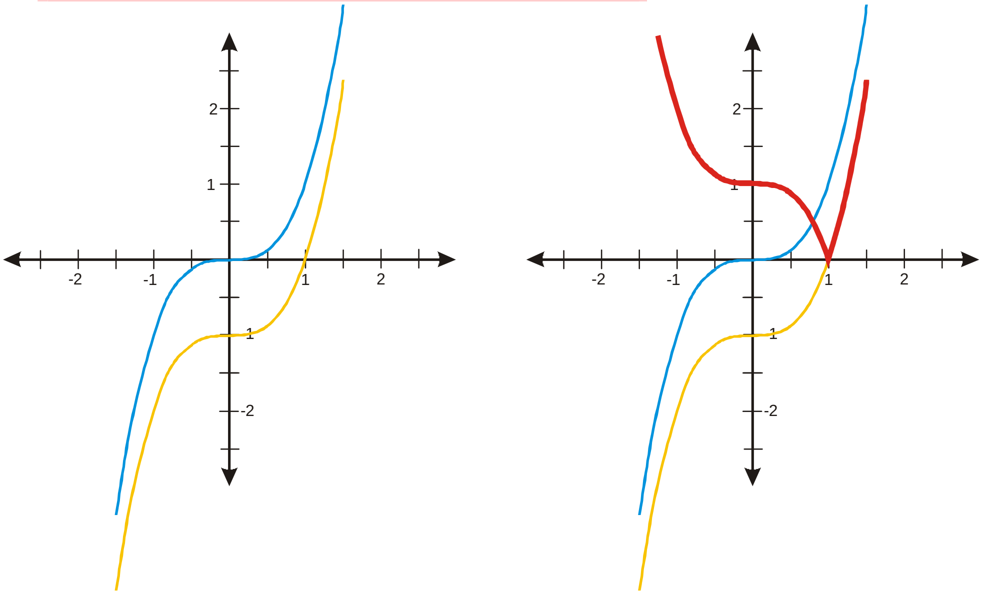
Předpoklady: 2414, 2701, 2702

Pedagogická poznámka: Hodina se skládá ze dvou částí. V první nakreslíme opakováním základní metody grafy několika odvozenin z mocninných funkcí. V druhé části hodiny ukazuji studentům další z metod kreslení některých funkcí. Ideální by bylo hodinu rozdělit na dvě části, ale stíháme to i takto.
Kreslení grafů „převracecí" metodou není z hlediska výuky příliš důležité, ale sled příkladů použitých v této hodině umožňuje velmi účinně odhalit jednu z nejčastějších chyb, které studenti v matematice dělají – otrocké napodobování předchozích výsledků bez pochopení logické podstaty.
Na kreslení grafů „převracecí" metodou je třeba alespoň 20 minut.

Když víme, jak vypadají grafy základních mocninných funkcí, můžeme metodou kreslení grafu obecné funkce kreslit i grafy funkcí z nich odvozených.

Př. 1: Nakresli graf funkce $y=\left|x^3-1\right|$.

Jde o odvozeninu z funkce $y=x^3$, přepíšeme pomocí $y=x^3=f(x) \Rightarrow$
$y=\left|x^3-1\right|=\left|f(x)-1\right|$.
Stejný postup jako vždy předtím.
Zvolíme x
Nakreslíme funkci $y=f(x)=x^3$.
Nakreslíme funkci $y=f(x)-1=x^3-1$.
Nakreslíme funkci $y=\left|f(x)-1\right|=\left|x^3-1\right|$.



Pedagogická poznámka: Příklady by neměly činit studentům problémy, pokud činí je třeba rozlišit, jestli si jenom nepamatují, jak se grafy obecně kreslí (častější případ) nebo jestli nejsou schopni se dostatečně rychle orientovat v tom, že se základní funkce v každém příkladu mění.

Př. 2: Nakresli graf funkce $y = 2(x+1)^4 - 1$.

Jde o odvozeninu z funkce $y = x^4$, přepíšeme pomocí $y = x^4 = f(x) \Rightarrow$

$y = 2(x+1)^4 - 1 = 2f(x+1) - 1$.

Stejný postup jako vždy předtím.

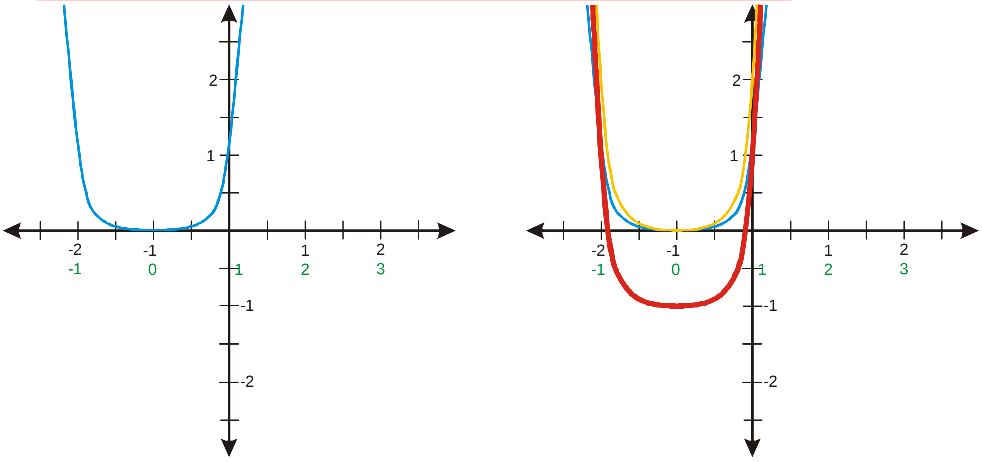
Zvolíme x.

Vypočteme $x+1$.

Nakreslíme funkci $y = (x+1)^4 = f(x+1)$.

Nakreslíme funkci $y = 2(x+1)^4 = 2f(x+1)$.

Nakreslíme funkci $y = 2(x+1)^4 - 1 = 2f(x+1) - 1$.



Př. 3: Nakresli graf funkce $y = \left|\frac{1}{(x-1)^3} + 1\right|$.

Jde o odvozeninu z funkce $y = \frac{1}{x^3}$, přepíšeme pomocí $y = \frac{1}{x^3} = f(x) \Rightarrow$

$y = \left|\frac{1}{(x-1)^3} + 1\right| = |f(x-1) + 1|$.

Stejný postup jako vždy předtím.

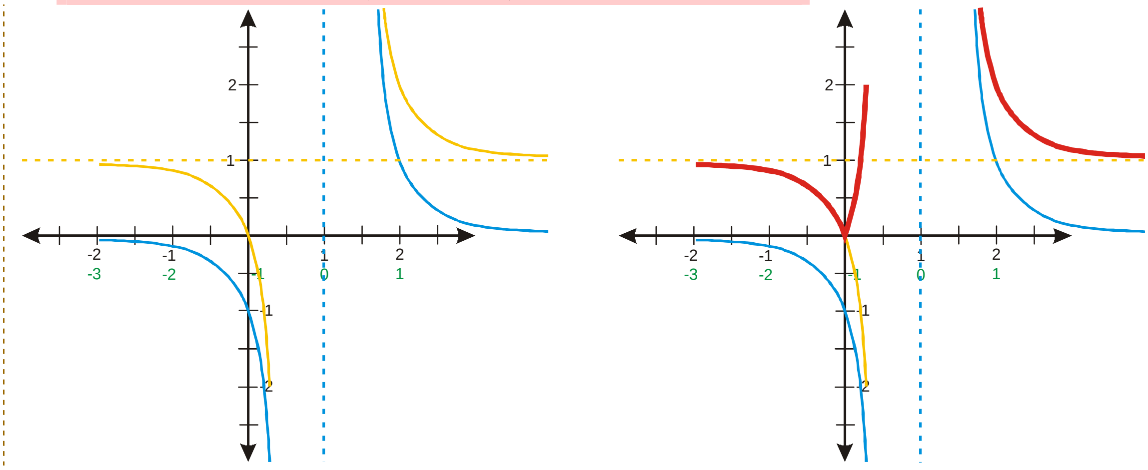
Zvolíme x.

Vypočteme $x-1$.

Nakreslíme funkci $y = \frac{1}{(x-1)^3} = f(x-1)$.

Nakreslíme funkci $y = \frac{1}{(x-1)^3} + 1 = f(x-1) + 1$.

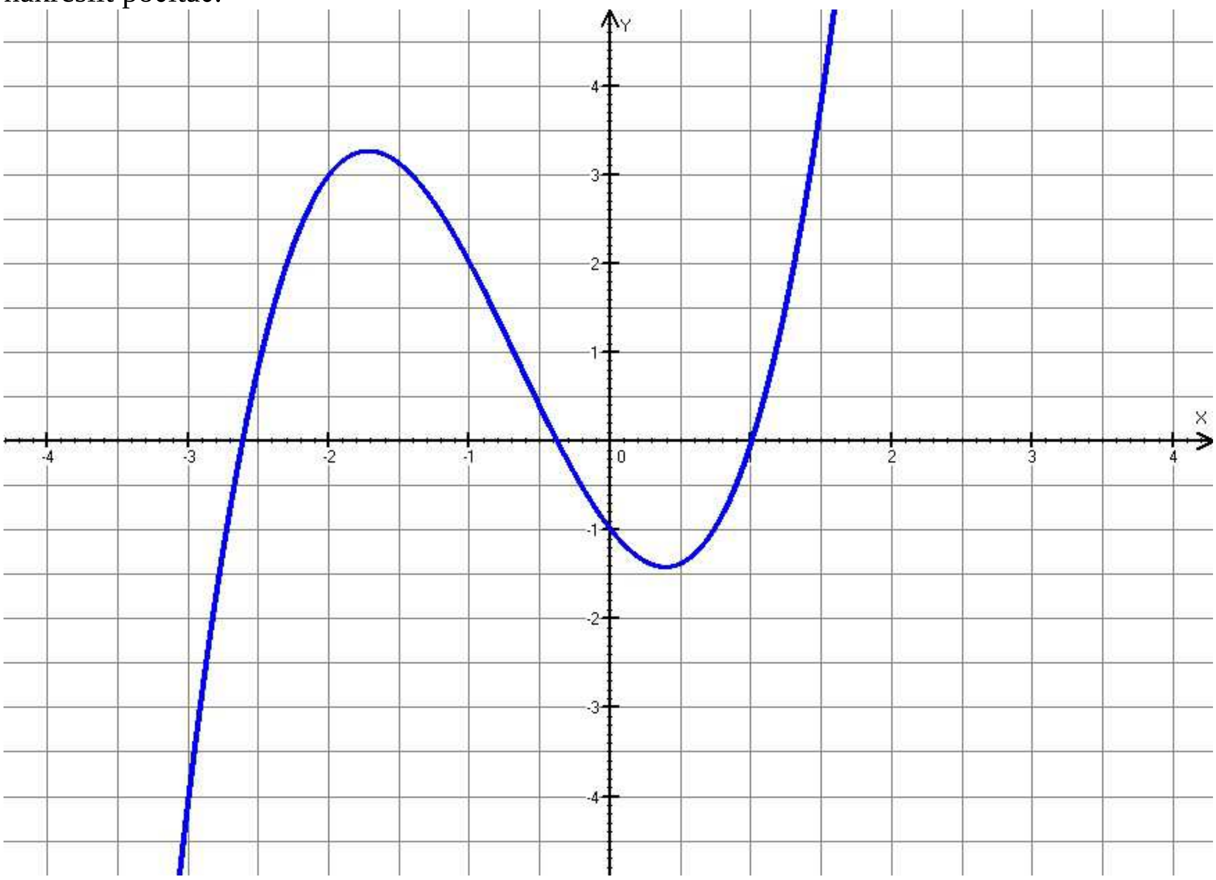
Nakreslíme funkci $y=\left|\frac{1}{(x-1)^3}+1\right|=\left|f(x-1)+1\right|$.



Je to pořád dokola, takže to není moc zajímavé. Jediným problémem je určení správné základní funkce a přepsání předpisu pomocí $f(x)$.

Př. 4: Nakresli graf funkce $y=x^3+2x^2-2x-1$.

Problém: Neznámá x je v předpisu vícekrát $\Rightarrow$ musíme upravit výraz, aby se vyskytovala pouze jednou, ale to u funkcí, kde s vyšší než druhou mocninou nejde vždy $\Rightarrow$ necháme graf nakreslit počítač.



I z obrázku je vidět, že nejde o normálně deformovaný graf funkce $y = x^3$ $\Rightarrow$ v tomto případě by se nám úprava na tvar s jediným výskytem neznámé asi nepovedla.

V některých případech můžeme přibližně nakreslit graf pomocí jiných metod, například pomocí „Žílovy převracecí metody“.

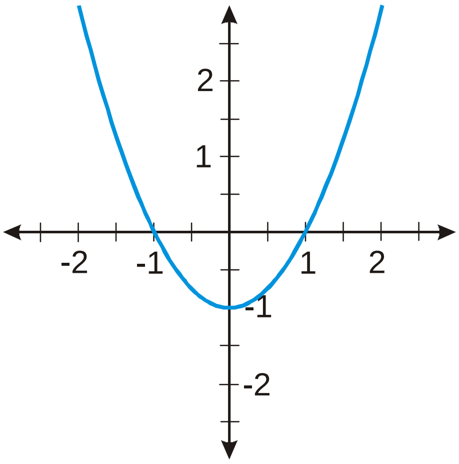
Pedagogická poznámka: Následující příklad samozřejmě kreslím a vysvětluji na tabuli. Snažím se však, aby co největší část kreslili studenti pokud možno samostatně.

Př. 5: Nakresli graf funkce $y = \frac{1}{x^2 - 1}$. Pro splnění úlohy využij graf funkce $y = x^2 - 1$.

Graf hledané funkce nakreslit neumíme, ale nakreslit graf funkce $y = x^2 - 1$ je snadné.

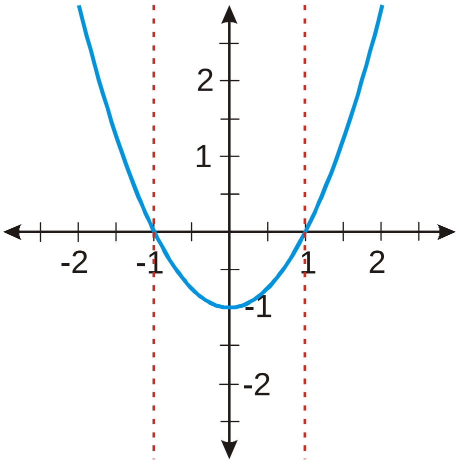
Hodnoty požadované funkce $y = \frac{1}{x^2 - 1}$ získáme snadno z hodnot funkce $y = x^2 - 1$ jako jejich převrácenou hodnotu.

Nakreslíme graf funkce $y = x^2 - 1$.

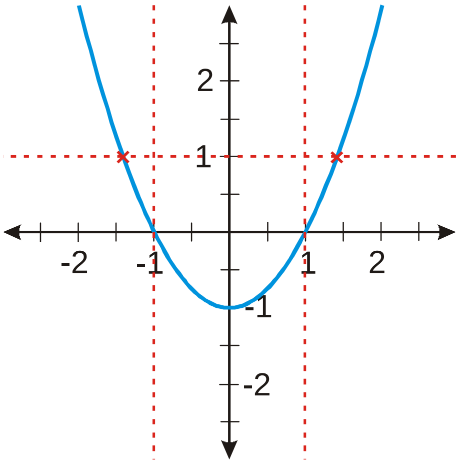


Procházíme hodnoty funkce $y = x^2 - 1$ a hledáme k ním převrácená čísla. Z nich získáme body nového grafu.

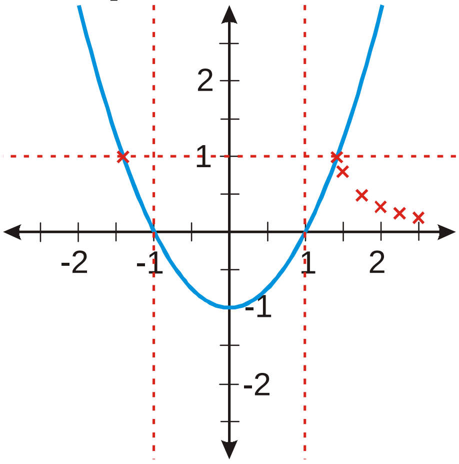
V pro $x = -1$ a $x = 1$ má funkce $y = x^2 - 1$ hodnotu 0. K nule nelze nalézt převrácenou hodnotu $\Rightarrow$ pro $x = -1$ a $x = 1$ nemá graf funkce $y = \frac{1}{x^2 - 1}$, žádnou hodnotu (stejně jako funkce $y = \frac{1}{x}$ pro $x = 0$).



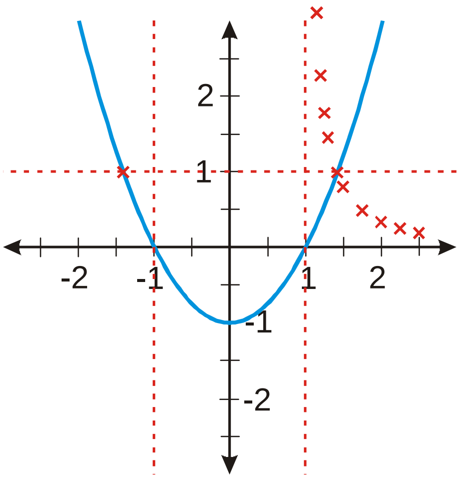
Nejsnáze se hledá převrácená hodnota k 1, je to opět 1. Na grafu najdeme *x*, pro která má funkce $y = x^2 - 1$ hodnotu 1. Tyto body se po převrácení nepohnou.



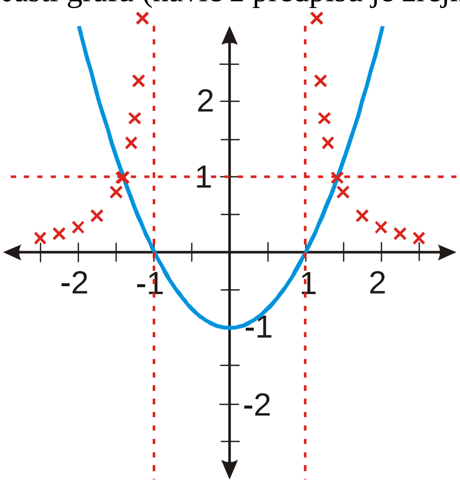
Studujme body napravo od pravého bodu s $y = 1$. Hodnoty modré funkce $y = x^2 - 1$ jsou čím dál víc vpravo tím větší. Převrácené hodnoty, které z nich tvoříme, tak budou čím dál menší.



Studujme body nalevo od pravého bodu s $y = 1$ směrem k bodu 1. Hodnoty modré funkce $y = x^2 - 1$ jsou čím dál víc vlevo tím menší. Převrácené hodnoty, které z nich tvoříme, tak budou čím dál větší. Protože hodnoty funkce $y = x^2 - 1$ se postupně blíží k nule, budou se hodnoty funkce $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ blížit k nekonečnu.

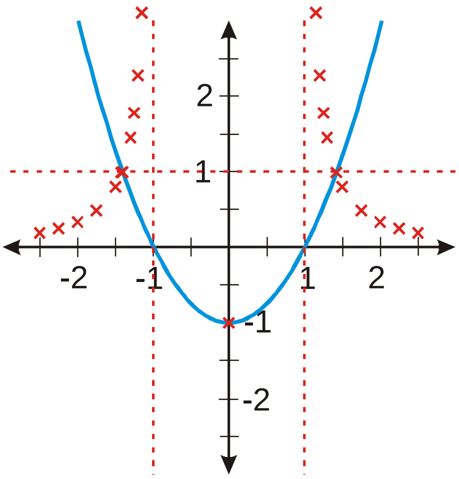


Podobným způsobem můžeme nakreslit požadovaný graf kolem bodu s hodnotou 1 v levé části grafu (navíc z předpisu je zřejmé, že hledaná funkce je sudá).

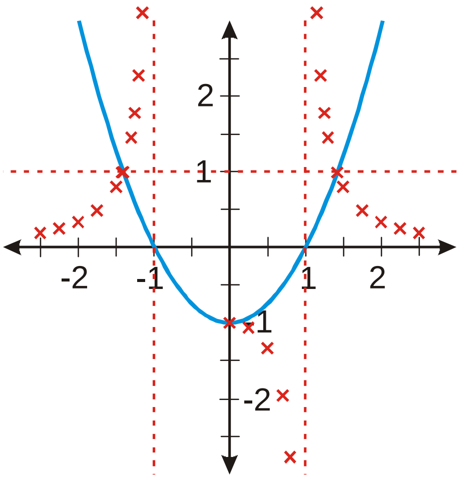


Nyní prozkoumáme graf pro $x \in (-1;1)$.

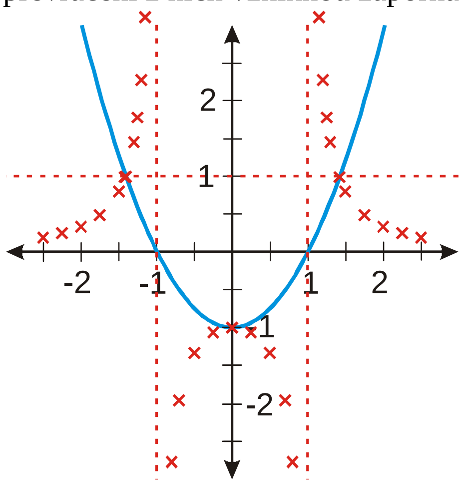
V bodě $x = 0$ má funkce $y = x^2 - 1$ hodnotu $y = -1$. Toto číslo se převrácením nezmění, bod zůstane na místě.



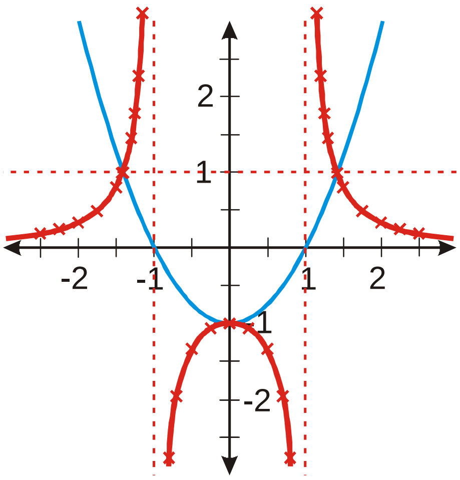
Když se hodnoty *x* zvětšují a blíží se zleva k 1, hodnoty funkce $y = x^2 - 1$, jsou záporná čísla s čím dál menší absolutní hodnotou. Po převrácení z nich vzniknou záporná čísla s čím dál větší absolutní hodnotou..



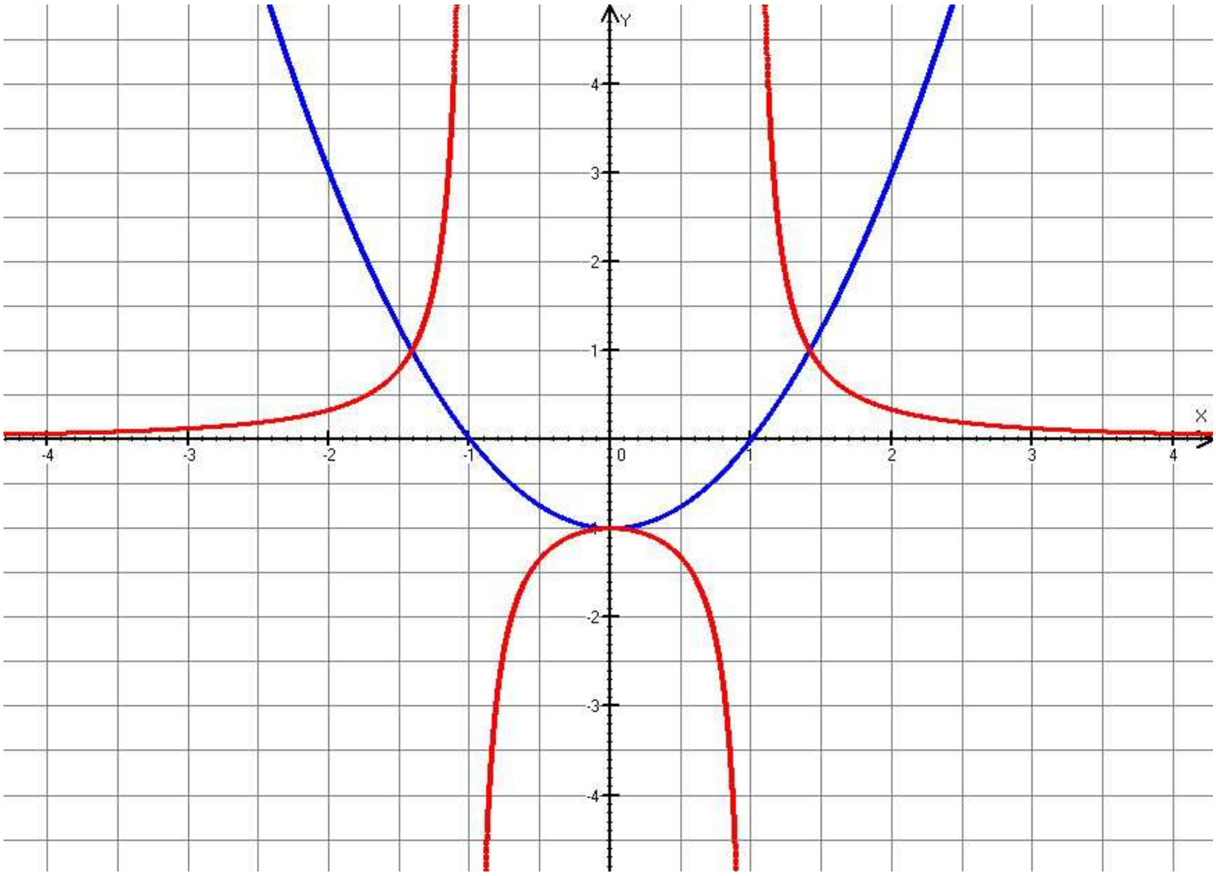
Podobně můžeme postupovat pro hodnoty *x* zmenšující se postupně od 0 k –1. Hodnoty funkce $y = x^2 - 1$, jsou čím více vlevo záporná čísla s čím dál menší absolutní hodnotou. Po převrácení z nich vzniknou záporná čísla s čím dál větší absolutní hodnotou..



Tím je graf funkce $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ hotový.



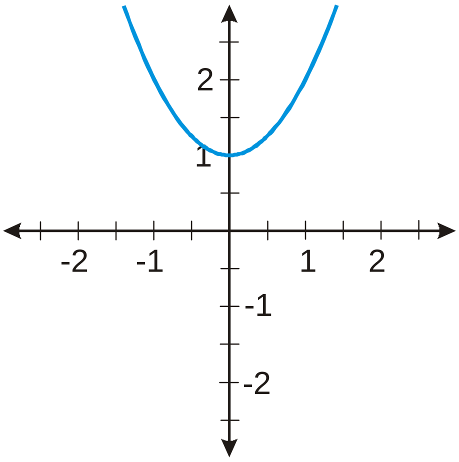
Naše řešení si ověříme pomocí počítače, který nakreslí funkce $y_1 = x^2 - 1$ a $y_2 = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.



Př. 6: Nakresli graf funkce $y = \frac{1}{x^2+1}$.

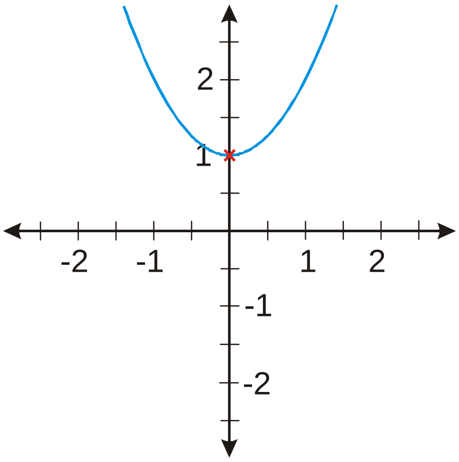
Graf funkce $y = \frac{1}{x^2+1}$ nakreslíme podobně jako v předchozím příkladě pomocí grafu funkce $y = x^2+1$ převracením hodnot.

Nakreslíme graf funkce $y = x^2+1$.

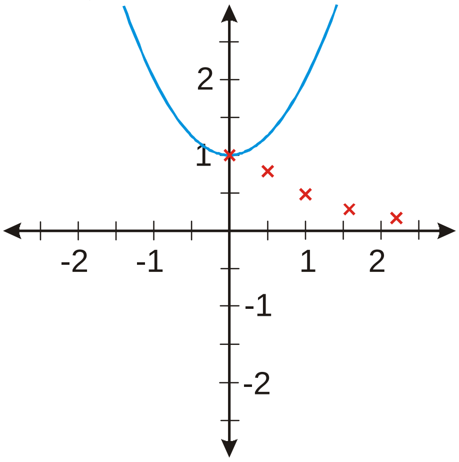


Funkce $y = x^2+1$ nemá nikde nulovou hodnotu $\Rightarrow$ funkce $y = \frac{1}{x^2+1}$ je definována pro všechna *x*.

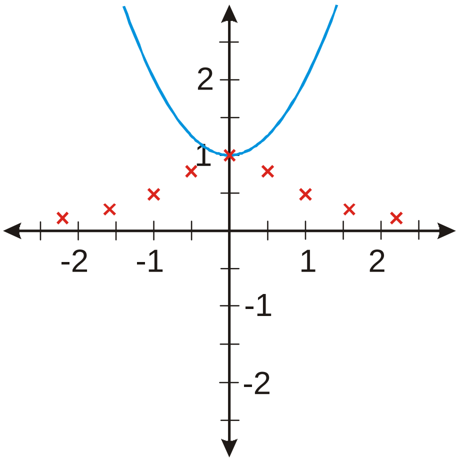
Jedinou hodnotou *x*, pro kterou funkce $y = x^2 + 1$ dosahuje hodnoty $y = 1$, je $x = 0 \Rightarrow$ jediným bodem grafu, který zůstává na místě, je bod $[0;1]$.



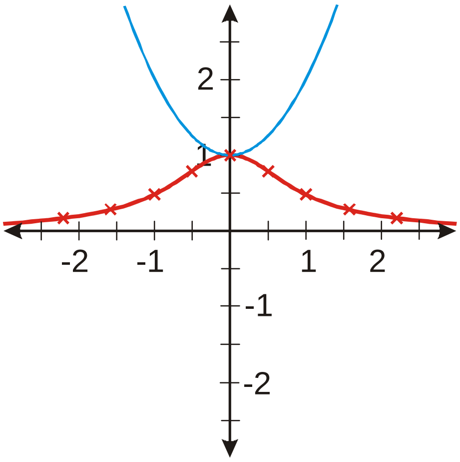
Pro $x \in (0;\infty)$ jsou hodnoty funkce $y = x^2 + 1$ čím dál větší čísla, hodnoty funkce $y = \frac{1}{x^2+1}$ musí být čím víc vpravo tím menší čísla $\Rightarrow$ graf se postupně blíží k ose *x*.



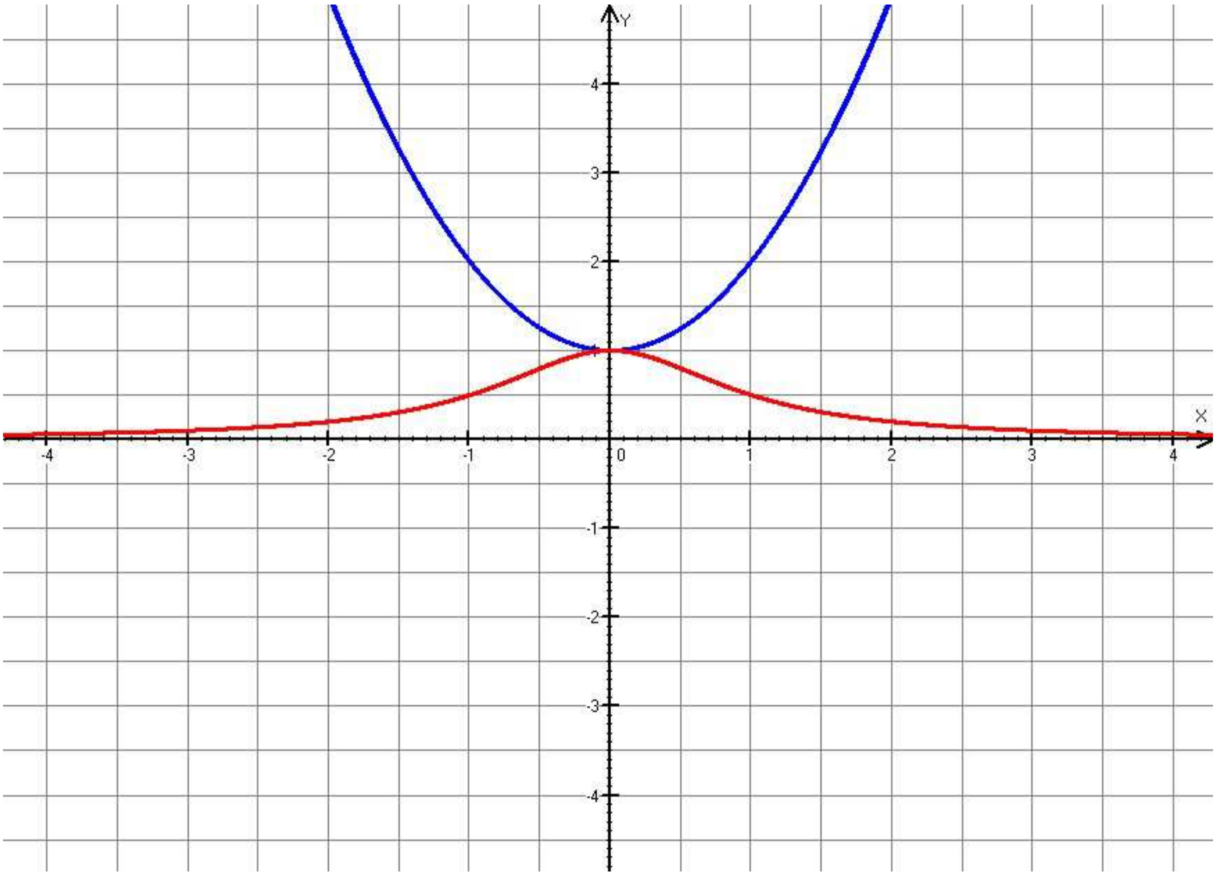
Pro $x \in (-\infty;0)$ jsou hodnoty funkce $y = x^2 + 1$ čím dál větší čísla, hodnoty funkce $y = \frac{1}{x^2+1}$ musí být čím víc vlevo tím menší čísla $\Rightarrow$ graf se postupně blíží k ose *x* (to samé ukazuje i fakt, že funkce $y = \frac{1}{x^2+1}$ je sudá).



Tím je graf funkce $y=\frac{1}{x^2+1}$ hotový.



Počítačový obrázek vypadá takto: $y_1=x^2+1$ a $y_2=\frac{1}{x^2+1}$.



Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je velmi zajímavý tím, že rozdělí třídu (díky zásadní odlišnosti výsledku od předchozího příkladu) na dvě skupiny.
Část studentů sleduje pravidlo o vyrábění převrácených hodnot a graf zdárně nakreslí. Častou „chybou" je pouze ostrá špička grafu v bodě $[0;1]$. Studentům vysvětlím, proč se špička u výsledku neobjeví, ale jinak to příliš neřešíme, protože metoda neumožňuje tak přesné kreslení, takže chybu neudělali.
Druhá část studentů příklad nakreslí úplně špatně, v naprosté většině případů buď jako kopii výsledku z příkladu 5 posunutou o dvě výše (tak aby se opět potkávaly

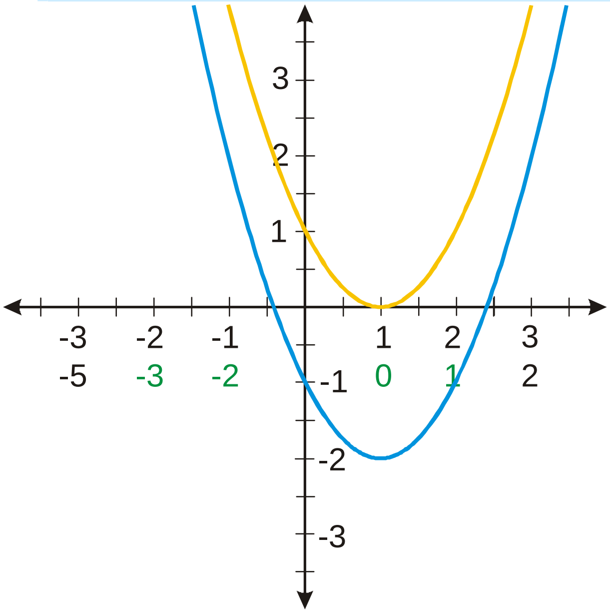
graf výchozí a převrácené funkce) nebo graf funkce $y=-x^2+1$. Podle mých zkušeností tato chyba hodně vypovídá o způsobu, jakým tito studenti uvažují (dosud jsme probírali vždy pouze jeden druh grafů, které jsme různě upravovali, ale základ zůstával stejný. V případu 5 jsme probrali další takový typ a následující příklady budou procvičovat další variování tohoto vzoru). K takovému postupu není žádný logický důvod, kromě zkušenosti „zatím to tak, vždycky bylo“. Právě kvůli ní je však hluboce přirozený!!! Snažím se těmto studentům vysvětlit, že odkaz na minulou zkušenost je určitě dobrý, ale pokud jde proti logice, musí se ho alespoň v matematice vzdát.
Obecně jde o to, že většina studentů, kteří nakreslí příklad špatně, více než na logické důvody spoléhá na otrocké napodobování. Snažím se jim vysvětlit, že jde o zásadní chybu v přístupu, která způsobuje daleko více problémů než to, když se třeba nenaučí tvary grafů mocninných funkcí.

Př. 7: Nakresli graf funkce $y=\frac{1}{(x-1)^2-2}$.

Graf funkce $y=\frac{1}{(x-1)^2-2}$ nakreslíme podobně jako v předchozích příkladech pomocí grafu funkce $y=(x-1)^2-2$, převracením hodnot. Obtížnější než v předchozích příkladech bude konstrukce výchozího grafu $y=(x-1)^2-2$.

1. Konstrukce grafu $y=(x-1)^2-2$**.**

Zvolíme x.
Vypočteme $x-1$.
Nakreslíme funkci $y=(x-1)^2=f(x-1)$.
Nakreslíme funkci $y=(x-1)^2-2=f(x-1)^2-2$.

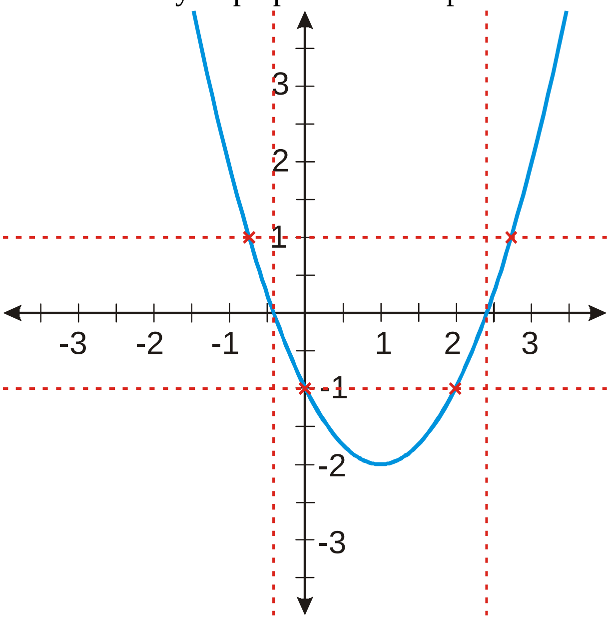


2. Konstrukce grafu funkce $y=\frac{1}{(x-1)^2-2}$

Procházíme hodnoty funkce $y=(x-1)^2-2$ a hledáme k nim převrácená čísla. Z nich získáme body nového grafu.

Nejdříve najdeme body, kde má funkce $y=(x-1)^2-2$ hodnotu 0. K nule nelze nalézt převrácenou hodnotu $\Rightarrow$ v těchto bodech nemá graf funkce $y=\dfrac{1}{(x-1)^2-2}$ žádnou hodnotu (svislé červené čárkované čáry).

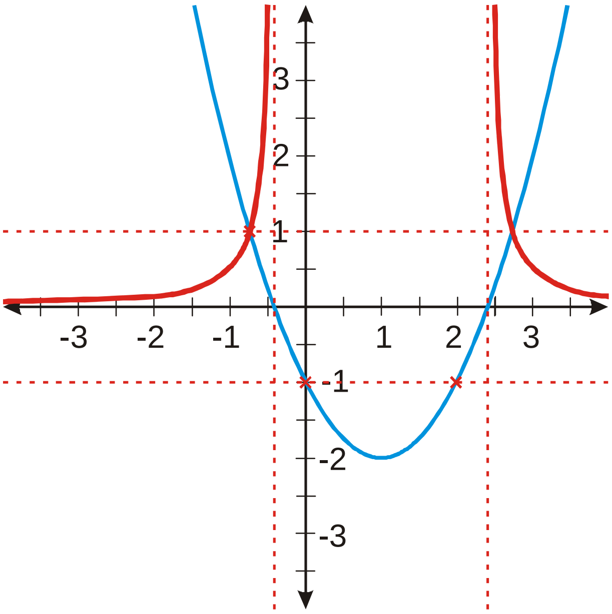
V graf najdeme body, ve kterých se hodnota funkce $y=\dfrac{1}{(x-1)^2-2}$ rovná 1 nebo -1 (vodorovné červené čárkované čáry). Čísla 1 a -1 se rovnají svým převráceným hodnotám. Nalezené body se po převrácení nepohnou.



Studujme body napravo od pravého bodu s $y=1$. Hodnoty modré funkce $y=(x-1)^2-2$ jsou čím dál víc vpravo tím větší. Převrácené hodnoty, které z nich tvoříme, tak budou čím dál menší. Hodnoty funkce $y=(x-1)^2-2$ se postupně blíží k nekonečnu, převrácené hodnoty funkce $y=\dfrac{1}{(x-1)^2-2}$ se budou blížit nule.

Hodnoty modré funkce $y=x^2-1$ pro x nalevo od pravého bodu s $y=1$ směrem k pravé svislé červené čáře jsou čím dál víc vlevo tím menší. Převrácené hodnoty, které z nich tvoříme, tak budou čím dál větší. Protože hodnoty funkce $y=(x-1)^2-2$ se postupně blíží k nule, budou se hodnoty funkce $y=\dfrac{1}{(x-1)^2-2}$ blížit k nekonečnu.

Podobně vyřešíme situaci na levé straně grafu.

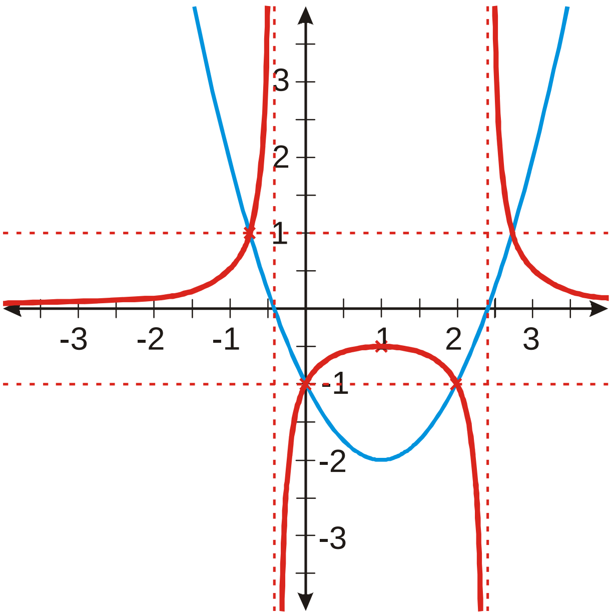


Vytvoříme prostřední část grafu, mezi svislými červenými čarami.
Nejmenší hodnotu má funkce pro $x=1$, kde je $y=-2$. Převrácená hodnota k -2 je $-0{,}5$.

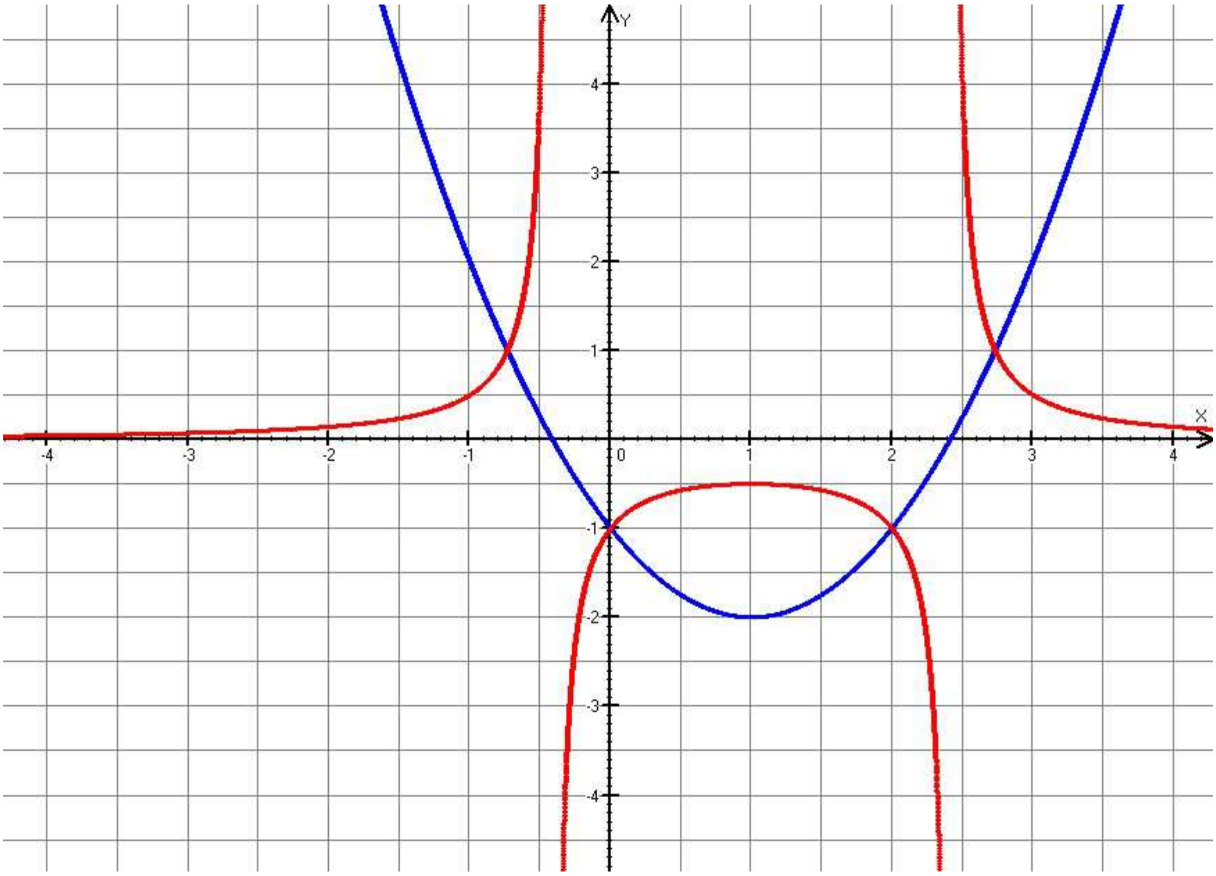
Takto jsme získali bod grafu $y=\dfrac{1}{(x-1)^2-2}$, tento bod vznikl převrácením nejmenší hodnoty v této části, bude tedy v této části nejvyšší hodnotou.

Když se hodnoty *x* zvětšují a blíží se zleva k červené čáře, hodnoty funkce $y=(x-1)^2-2$ jsou záporná čísla s čím dál menší absolutní hodnotou. Po převrácení z nich vzniknou záporná čísla s čím dál větší absolutní hodnotou.

Podobně můžeme postupovat pro hodnoty *x* zmenšující se postupně od 1 k levé červené svislé čáře. Hodnoty funkce $y=(x-1)^2-2$ jsou čím více vlevo záporná čísla s čím dál menší absolutní hodnotou. Po převrácení z nich vzniknou záporná čísla s čím dál větší absolutní hodnotou.



Počítačový obrázek vypadá takto: $y_1 = (x-1)^2 - 2$ a $y_2 = \frac{1}{(x-1)^2 - 2}$.



Př. 8: Petáková:
strana 57/cvičení 1 d)
strana 57/cvičení 2 f_4, f_6
strana 57/cvičení 3 g_3, g_4
strana 57/cvičení 5 m_2
strana 57/cvičení 7 s_2

Shrnutí: I některé grafy odvozené z grafů základních mocninných funkcí můžeme kreslit metodou napodobení výpočtu. U dalších můžeme požít převracení hodnot.