2.7.6 Rovnice vyšších řádů (separace kořenů)

Předpoklady: 020507, 020705

Přehled rovnic:

Řád rovnice	Tvar	Název	způsob řešení (vzorec)
1	$ax+b=0$	lineární	$a\neq 0$, $x=-\frac{b}{a}$
2	$ax^2+bx+c=0$	kvadratická	$a\neq 0$, $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
3	$ax^3+bx^2+cx+d=0$	kubická	Cardanovy vzorce
4	$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$		Cardanovy vzorce
5 a vyšší	$ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f=0$ $\ldots$		neexistuje (a je dokázáno, že existovat nemůže)

Se stupněm rovnice roste nejvyšší možný počet kořenů, který je vždy roven nejvyšší mocnině neznámé v rovnici.

Cardanovy vzorce jsou velice složité, proto je nebudeme pro rovnice třetího a vyšších řádů používat a zkusíme jiné metody.

1. Numerická metoda separace kořenů
S počítačem jednoduché, s kalkulačkou snesitelné, s papírem smrt, ale jde u všech algebraických rovnic. Výsledek je pouze přibližný (ale snadno ho zjistíme na libovolný počet desetinných míst).

Hledáme řešení rovnice $x^3-2x+5=0$.
Hodnoty levé strany nám přiblíží funkce $y=x^3-2x+5$. Jak vypadá?

- Pro velká záporná čísla jsou hodnoty záporné (kvůli zápornému výsledku třetí mocniny *x*).
- Pro velká kladná čísla jsou hodnoty kladné (kvůli kladnému výsledku třetí mocniny *x*).

$\Rightarrow$ Graf funkce musí projít přes osu *x*. Hodnota *x*, kde k tomu dojde, je řešením rovnice.
Hledáme toto místo dosazováním:
Dosadíme 0: $0^3-2\cdot 0+5=5$ $\Rightarrow$ kořen je záporné číslo.
Dosadíme –3: $(-3)^3-2\cdot(-3)+5=-16$ $\Rightarrow$ kořen je v intervalu $(-3;0)$.
Dosadíme –2: $(-2)^3-2\cdot(-2)+5=1$ $\Rightarrow$ kořen je v intervalu $(-3;-2)$.
Dosadíme –2,5: $(-2,5)^3-2\cdot(-2,5)+5=-5,625$ $\Rightarrow$ kořen je v intervalu $(-2,5;-2)$.
Dosadíme –2,1: $(-2,1)^3-2\cdot(-2,1)+5=-0,061$ $\Rightarrow$ kořen je v intervalu $(-2,1;-2,0)$.
A tak bychom dosazovali dál, dokud bychom nezjistili kořen s dostatečnou přesností.

Pedagogická poznámka: Při výkladu mám na tabuli nakreslenou soustavu souřadnic a postupně do ní dokresluji křížky s aktuálně spočítanou hodnotou. Tak je nejlépe vidět, ve kterém intervalu se kořen rovnice nachází. Už od dosazování –3 diskutujeme se studenty, které číslo je nejvýhodnější vyzkoušet.

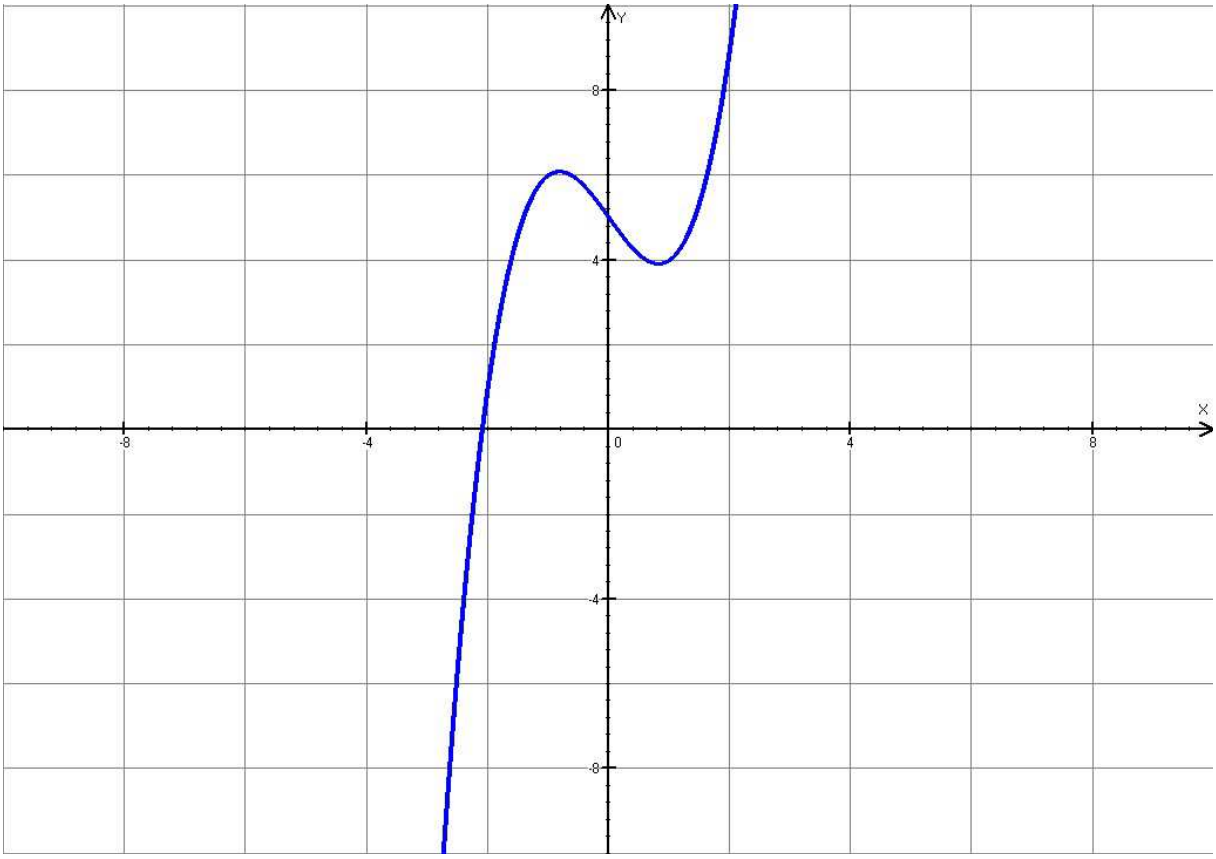
Př. 1: Urči kořen rovnice $x^3-2x+5=0$ s přesností na tři desetinná místa.

Pokračujeme v dosazování z předchozího postupu:
Dosadíme –2,09 $\left(-2,09\right)^3-2\cdot\left(-2,09\right)+5=0,0508$ $\Rightarrow$ kořen je v intervalu $\left(-2,1;-2,09\right)$.
Dosadíme –2,095 $\left(-2,095\right)^3-2\cdot\left(-2,095\right)+5=-0,005$ $\Rightarrow$ kořen je v intervalu $\left(-2,095;-2,090\right)$.
Dosadíme –2,094 $\left(-2,094\right)^3-2\cdot\left(-2,094\right)+5=0,0061$ $\Rightarrow$ kořen je v intervalu $\left(-2,095;-2,094\right)$ $\Rightarrow$ kořen je v intervalu $\left(-2,095;-2,094\right)$.
Dosadíme –2,094 $\left(-2,0945\right)^3-2\cdot\left(-2,0945\right)+5=0,000574...$ $\Rightarrow$ kořen je v intervalu $\left(-2,095;-2,0945\right)$ $\Rightarrow$ po zaokrouhlení na tři desetinná místa získáme číslo –2,095 $\Rightarrow$ určili jsme kořen s přesností na tři desetinná čísla.

Pedagogická poznámka: Můžete vyhlásit soutěž o odhalení kořenu na minimální počet dosazení. Při kontrole pak dávám pozor nejen na pochopení základního algoritmu, ale i na logickou volbu čísel na dosazování.

Pedagogická poznámka: Při kontrole počítám naživo v Excelu, abych demonstroval, jak jednoduché to s tabulkovým procesorem je.

Přesnější hodnota na 8 desetinných míst je $x=-2,094551482$.
Graf funkce $y=x^3-2x+5$ je na obrázku.



Z grafu je zřejmé, že nalezený kořen byl jediný (v oboru reálných čísel).

Př. 2: Najdi metodou separace kořenů co nejúsporněji alespoň jeden kořen rovnice $3x^3 - 3x - 7 = 0$ s přesností na dvě desetinná místa. Hodnoty *x* vol tak, abys výsledek našel na co nejmenší počet dosazení.

Rovnice má určitě alespoň jeden kořen (funkce $y = 3x^3 - 3x - 7$ je pro velká kladná *x* kladná pro velká záporná *x* záporná $\Rightarrow$ musí projít přes nulu).
Spočítáme hodnoty pro několik jednoduchých čísel:

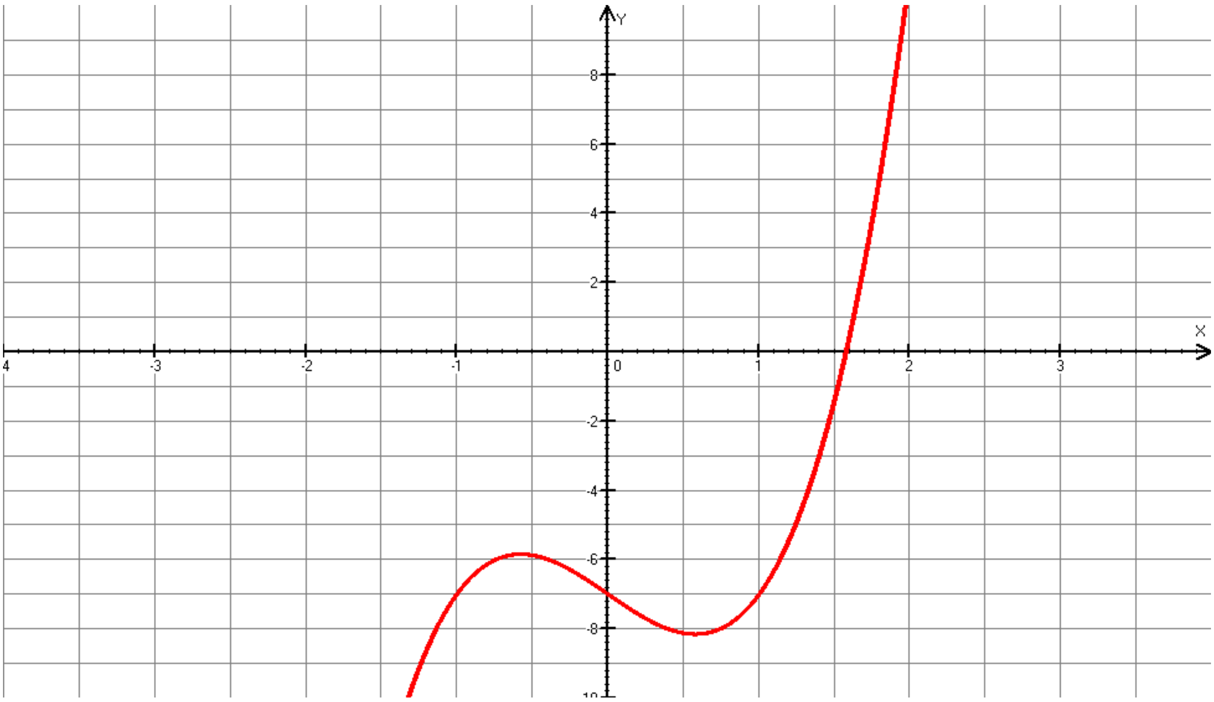
- $x = 0$
  $3 \cdot 0^3 - 3 \cdot 0 - 7 = -7$ $\Rightarrow$ v intervalu $(0;\infty)$ je alespoň jeden kořen.
- $x = 2$ (hodnota $3 \cdot 1^3$ je menší než 7)
  $3 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2 - 7 = 11$ $\Rightarrow$ v intervalu $(0;2)$ je alespoň jeden kořen.
- $x = 1{,}5$ (pro $x = 1$ je hodnota funkce ještě záporná $\Rightarrow$ půlíme interval $(1;2)$)
  $3 \cdot 1{,}5^3 - 3 \cdot 1{,}5 - 7 = -1{,}375$ $\Rightarrow$ v intervalu $(1{,}5;2)$ je alespoň jeden kořen.
- $x = 1{,}6$ (pro $x = 1{,}5$ je hodnota funkce záporná daleko bližší nule než pro $x = 2$ $\Rightarrow$ volíme číslo blíže k číslu 1,5)
  $3 \cdot 1{,}6^3 - 3 \cdot 1{,}6 - 7 = 0{,}488$ $\Rightarrow$ v intervalu $(1{,}5;1{,}6)$ je alespoň jeden kořen.
- $x = 1{,}57$ (pro $x = 1{,}6$ je hodnota funkce blíže nule než pro $x = 1{,}5$ $\Rightarrow$ volíme číslo blíže k 1,6)
  $3 \cdot 1{,}57^3 - 3 \cdot 1{,}57 - 7 = -0{,}100321$ $\Rightarrow$ v intervalu $(1{,}57;1{,}6)$ je alespoň jeden kořen.

- $x = 1,58$ (pro $x = 1,57$ je hodnota funkce blíže nule než pro $x = 1,6$ $\Rightarrow$ volíme číslo blíže k 1,57)
  $3 \cdot 1,58^3 - 3 \cdot 1,58 - 7 = 0,092936$ $\Rightarrow$ v intervalu $(1,57;1,58)$ je alespoň jeden kořen.
- $x = 1,575$ (rozhodneme o tom, zda se číslo z intervalu $(1,57;1,58)$ zaokrouhlí nahoru nebo dolů)
  $3 \cdot 1,575^3 - 3 \cdot 1,575 - 7 = -0,004...$ $\Rightarrow$ kořen je v intervalu $(1,575;1,58)$ $\Rightarrow$ po zaokrouhlení na dvě desetinná místa získáme číslo 1,58.

Jeden z kořenů rovnice $3x^3 - 3x - 7 = 0$ se s přesností na dvě desetinná místa rovná 1,58.

Přesnější hodnota na 10 desetinných míst je $x = 1,5752093724$.

Graf funkce $y = 3x^3 - 3x - 7$ je na obrázku.



Z grafu je zřejmé, že nalezený kořen je v oboru reálných čísel jediný.

Př. 3: Odseparuj s přesností na dvě desetinná místa kořeny rovnice $2x^3 - 9x^2 - 14x + 60 = 0$.

Rovnice má určitě alespoň jeden kořen (funkce $y = 2x^3 - 9x^2 - 14x + 60$ je pro velká kladná x kladná pro velká záporná x záporná $\Rightarrow$ musí projít přes nulu).

- $x = 0$
  $2 \cdot 0^3 - 9 \cdot 0^2 - 14 \cdot 0 + 60 = 60$ $\Rightarrow$ v intervalu $(0;\infty)$ není žádný kořen nebo jsou dva kořeny.
- $x = -3$
  $2 \cdot (-3)^3 - 9 \cdot (-3)^2 - 14 \cdot (-3) + 60 = -33$ $\Rightarrow$ kořen je v intervalu $(-3;0)$.
- $x = -2$
  $2 \cdot (-2)^3 - 9 \cdot (-2)^2 - 14 \cdot (-2) + 60 = 36$ $\Rightarrow$ kořen je v intervalu $(-3;-2)$.

- $x = -2,5$
  $2\cdot(-2,5)^3 - 9\cdot(-2,5)^2 - 14\cdot(-2,5) + 60 = 7,5 \Rightarrow$ kořen je v intervalu $(-3;-2,5)$.
- $x = -2,6$
  $2\cdot(-2,6)^3 - 9\cdot(-2,6)^2 - 14\cdot(-2,6) + 60 = 0,408 \Rightarrow$ kořen je v intervalu $(-3;-2,6)$.
- $x = -2,61$
  $2\cdot(-2,61)^3 - 9\cdot(-2,61)^2 - 14\cdot(-2,61) + 60 = -0,32... \Rightarrow$ kořen je v intervalu $(-2,61;-2,60)$.
- $x = -2,605$
  $2\cdot(-2,605)^3 - 9\cdot(-2,605)^2 - 14\cdot(-2,605) + 60 = 0,0405... \Rightarrow$ kořen je v intervalu $(-2,61;-2,605) \Rightarrow$ po zaokrouhlení na dvě desetinná místa má hledaný kořen hodnotu $x = -2,61$.

Hledáme další kořeny $\Rightarrow$ zkoušíme, zda v intervalu $(0;\infty)$ najdeme zápornou hodnotu (pak by v něm musela funkce projít přes osu dvakrát, protože v 0 i v plus nekonečnu je její hodnota kladná), nebo v intervalu $(-\infty;-3)$ kladnou (pak by v něm musela funkce projít přes osu dvakrát, protože v mínus nekonečnu i v -3 je její hodnota záporná).

- $x = 3$
  $2\cdot(3)^3 - 9\cdot(3)^2 - 14\cdot(3) + 60 = -9 \Rightarrow$ rovnice má ještě dva kořeny: v intervalu $(0;3)$ a v intervalu $(3;\infty)$ (a jiné kořeny již nemá).

Hledáme kořen v intervalu $(0;3)$

- $x = 2$
  $2\cdot 2^3 - 9\cdot 2^2 - 14\cdot 2 + 60 = 12 \Rightarrow$ kořen je v intervalu $(2;3)$.
- $x = 2,5$
  $2\cdot 2,5^3 - 9\cdot 2,5^2 - 14\cdot 2,5 + 60 = 0 \Rightarrow$ číslo 2,5 je hledaným kořenem rovnice v intervalu $(2;3)$.

Hledáme kořen v intervalu $(3;\infty)$

- $x = 5$
  $2\cdot 5^3 - 9\cdot 5^2 - 14\cdot 5 + 60 = 15 \Rightarrow$ kořen je v intervalu $(3;5)$.
- $x = 4$
  $2\cdot 4^3 - 9\cdot 4^2 - 14\cdot 4 + 60 = -12 \Rightarrow$ kořen je v intervalu $(4;5)$.
- $x = 4,5$
  $2\cdot 4,5^3 - 9\cdot 4,5^2 - 14\cdot 4,5 + 60 = -3 \Rightarrow$ kořen je v intervalu $(4,5;5)$ (jeho hodnota se blíží více číslu 4,5).
- $x = 4,6$
  $2\cdot 4,6^3 - 9\cdot 4,6^2 - 14\cdot 4,6 + 60 = -0,168 \Rightarrow$ kořen je v intervalu $(4,6;5)$ (jeho hodnota je velmi blízká 4,6).
- $x = 4,61$
  $2\cdot 4,61^3 - 9\cdot 4,61^2 - 14\cdot 4,61 + 60 = 0,135... \Rightarrow$ kořen je v intervalu $(4,60;4,61)$ (zřejmě někde uprostřed).

- $x = -4,605$
  $2 \cdot 4,605^3 - 9 \cdot 4,605^2 - 14 \cdot 4,605 + 60 = -0,0167...$ $\Rightarrow$ kořen je v intervalu $(4,605; 4,61)$ $\Rightarrow$ po zaokrouhlení na dvě desetinná místa má hledaný kořen hodnotu $x = 4,61$.

Graf funkce $y = 2x^3 - 9x^2 - 14x + 60$ je na obrázku.

Z grafu je zřejmé, že rovnice $2x^3 - 9x^2 - 14x + 60 = 0$ má tři reálné kořeny, s přesností na deset desetinných míst pro její řešení platí $K = \{-2,605551275;\ \ 2,5;\ \ 4,605551275\}$.

Pedagogická poznámka: Pokud si někdo všimne podobnosti desetinných vyjádření krajních kořenů předchozí rovnice (možné je to už při separování, pravděpodobnější při kontrole, kde je vidět více míst), odkazuji ho na druhou část lekce, kde většinou sám najde vysvětlení.

Rovnice druhého a třetího řádu (na nejnovější řadě CASIA i čtvrtého rádu) můžeme řešit také na některých kalkulačkách (jde o vyšší typy vědeckých kalkulátorů, které jsou zakázány u státních maturit).
Následující postup platí pro kalkulačky CASIO (konkrétně typ fx-570MS)

- Tlačítkem MODE přepínáme dokud se na display neobjeví mód pro řešení rovnic EQN.
- Přepneme do tohoto módu odpovídajícím tlačítkem (v našem případě 1).
- Nevolíme počet neznámých (otázka Unknowns?), ale přejdeme doprava na další nabídku tlačítkem REPLAY.
- Zvolíme stupeň (otázka Degree?).
- Na display se objeví dotaz na jednotlivé koeficienty soustavy (jako první *a*), zadání koeficientů ukončujeme tlačítkem =.
- Koeficienty se zadávají z následujících tvarů rovnic:
  $ax^2 + bx + c = 0$,
  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

- Po zadání posledního koeficientu zobrazí kalkulačka kořeny rovnice.

Například pro rovnici $6x^3 - 7x^2 - x + 2 = 0$ získáme řešení $K = \left\{1; -\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right\}$.

Př. 4: Vyřeš na kalkulačce rovnice.
a) $10x^3 - 11x^2 - 25x + 14 = 0$
b) $x^3 + 7x^2 + 3x - 18 = 0$
c) $x^3 + 3x^2 - 3 = 0$

Zadáme do kalkulačky koeficienty rovnic postupem popsaným výše.
a) $10x^3 - 11x^2 - 25x + 14 = 0$
Tři přesné kořeny: $x_1 = 2$, $x_2 = -1,4$, $x_3 = 0,5 \Rightarrow K = \{-1,4; 0,5; 2\}$

b) $x^3 + 7x^2 + 3x - 18 = 0$
Jeden přesný kořen: $x_1 = -6$.
Dva přibližné kořeny: $x_2 \doteq 1,3027756$, $x_3 \doteq -2,3027756$
$K = \{-6; -2,3027756; 1,3027756\}$

c) $x^3 + 3x^2 - 3 = 0$
Tři přibližné kořeny: $x_1 \doteq 0,8793852$, $x_2 \doteq -2,5320889$, $x_3 \doteq -1,3472964$
$K = \{-2,5320889; -1,3472964; 0,8793852\}$

Př. 5: Vyřeš na kalkulačce rovnic $x^3 - 2x + 5 = 0$.

Velmi překvapivé. Jde o první příklad, který jsme v dnešní hodně řešili. U rovnice jsme našli jediný kořen, což potvrdil i graf funkce. Kalkulačka přesto zobrazuje tři výsledky.
Bližší pohled na display:
Kořen $x_1 = -2,0945514$ odpovídá hodnotě, kterou jsme našli v příkladu 1.
Další dva kořeny mají v pravém horním rohu display znak $R \Leftrightarrow I$.
Rovnice $x^3 - 2x + 5 = 0$ má v reálných číslech doopravdy pouze jeden kořen. Kromě množiny reálných existuje však i množina komplexních čísel (ve které reálná čísla tvoří jen malou část) a v této větší množině má rovnice $x^3 - 2x + 5 = 0$ (stejně jako každá jiná kubická rovnice) tři řešení.

Pedagogická poznámka: Je velmi zajímavé sledovat, zda si někdo všimne, že předchozí příklad už jsme řešili a že je divné, když má najednou tři řešení místo jednoho.

Shrnutí: Metoda separace kořenů umožňuje dosazováním zjistit nepřesně, ale na libovolný počet míst, kořeny rovnic.