2.7.6 Rovnice vyšších řádů

Předpoklady: 2507, 2705

Pedagogická poznámka: Pokud mám jenom trochu čas probírám látku této hodiny ve dvou vyučovacích hodinách. V první probíráme separaci kořenů, v druhé pak snížení stupně.

Přehled rovnic:

Řád rovnice	Tvar	Název	způsob řešení (vzorec)
1	$ax+b=0$	lineární	$a \neq 0$, $x=-\frac{b}{a}$
2	$ax^2+bx+c=0$	kvadratická	$a \neq 0$, $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
3	$ax^3+bx^2+cx+d=0$	kubická	Cardanovy vzorce
4	$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$		Cardanovy vzorce
5 a vyšší	$ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f=0$ ….		neexistuje

Cardanovy vzorce jsou velice složité, proto je nebudeme pro rovnice třetího a vyšších řádů používat a zkusíme jiné metody.

1. Numerická metoda separace kořenů
S počítačem jednoduché, s kalkulačkou snesitelné, s papírem smrt, ale jde u všech algebraických rovnic. Výsledek je pouze přibližný (ale snadno ho zjistíme na libovolný počet desetinných míst).

Hledáme řešení rovnice $x^3-2x+5=0$.
Hodnoty levé strany nám přiblíží funkce $y=x^3-2x+5$. Jak vypadá?

- Pro velká záporná čísla jsou hodnoty záporné (kvůli zápornému výsledku třetí mocniny *x*).
- Pro velká kladná čísla jsou hodnoty kladné (kvůli kladnému výsledku třetí mocniny *x*).

$\Rightarrow$ Graf funkce musí projít přes osu *x*. Hodnota *x*, kde k tomu dojde, je řešením rovnice.
Hledáme toto místo dosazováním:

Dosadíme 0: $0^3-2\cdot 0+5=5$ $\Rightarrow$ kořen je záporné číslo.

Dosadíme –3: $(-3)^3-2\cdot(-3)+5=-16$ $\Rightarrow$ kořen je v intervalu $(-3;0)$.

Dosadíme –2: $(-2)^3-2\cdot(-2)+5=1$ $\Rightarrow$ kořen je v intervalu $(-3;-2)$.

Dosadíme –2,5: $(-2,5)^3-2\cdot(-2,5)+5=-5,625$ $\Rightarrow$ kořen je v intervalu $(-2,5;-2)$.

Dosadíme –2,1: $(-2,1)^3-2\cdot(-2,1)+5=-0,061$ $\Rightarrow$ kořen je v intervalu $(-2,1;-2,0)$.

A tak bychom dosazovali dál, dokud bychom nezjistili kořen s dostatečnou přesností.

Pedagogická poznámka: Při výkladu mám na tabuli nakreslenou soustavu souřadnic a postupně do ní dokresluji křížky s aktuálně spočítanou hodnotou. Tak je nejlépe vidět, ve kterém intervalu se kořen rovnice nachází. Už od dosazování –3 diskutujeme se studenty, které číslo je nejvýhodnější vyzkoušet.

Př. 1: Urči kořen rovnice $x^3-2x+5=0$ s přesností na tři desetinná místa.

Pokračujeme v dosazování z předchozího postupu:

Dosadíme –2,09 $(-2,09)^3-2\cdot(-2,09)+5=0,0508$ $\Rightarrow$ kořen je v intervalu $(-2,1;-2,09)$.

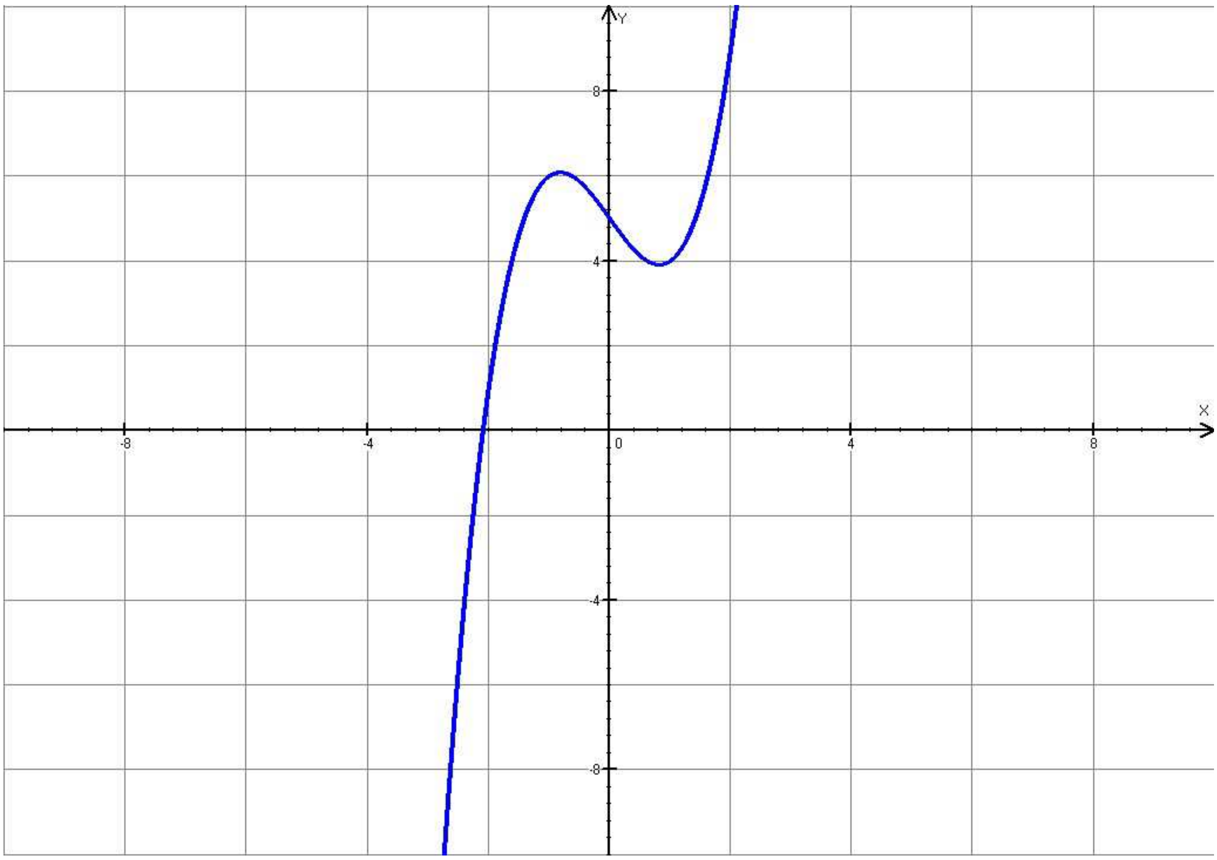
Dosadíme –2,095 $(-2,095)^3-2\cdot(-2,095)+5=-0,005$ $\Rightarrow$ kořen je v intervalu $(-2,095;-2,090)$.

Dosadíme –2,094 $(-2,094)^3-2\cdot(-2,094)+5=0,0061$ $\Rightarrow$ kořen je v intervalu $(-2,095;-2,094)$ $\Rightarrow$ určili jsme kořen s přesností na tři desetinná čísla.

Pedagogická poznámka: Můžete vyhlásit soutěž o odhalení kořenu na minimální počet dosazení. Při kontrole pak dávám pozor nejen na pochopení základního algoritmu, ale i na logickou volbu čísel na dosazování.

Správná hodnota na 8 desetinných míst je $K=\{-2,094551482\}$.

Graf funkce $y=x^3-2x+5$ je na obrázku.



Př. 2: Najdi pomocí metody separace kořenů, alespoň jeden kořen rovnice $2x^3-9x^2-14x+60=0$ s přesností na jedno desetinné místo.

Rovnice má určitě alespoň jeden kořen (funkce $y=2x^3-9x^2-14x+60$ je pro velká kladná x kladná pro velká záporná x záporná $\Rightarrow$ musí projít přes nulu).
Spočítáme hodnoty pro několik jednoduchých čísel:
$x=0$
$2\cdot 0^3-9\cdot 0^2-14\cdot 0+60=60$ $\Rightarrow$ v intervalu $(0;\infty)$ není žádný kořen nebo jsou dva kořeny.
$x=-3$
$2\cdot(-3)^3-9\cdot(-3)^2-14\cdot(-3)+60=-33$ $\Rightarrow$ v intervalu $(-3;0)$ je alespoň jeden kořen.
$x=-2$
$2\cdot(-2)^3-9\cdot(-2)^2-14\cdot(-2)+60=36$ $\Rightarrow$ v intervalu $(-3;-2)$ je alespoň jeden kořen.
$x=-2,5$
$2\cdot(-2,5)^3-9\cdot(-2,5)^2-14\cdot(-2,5)+60=7,5$ $\Rightarrow$ v intervalu $(-3;-2,5)$ je alespoň jeden kořen.
$x=-2,6$
$2\cdot(-2,6)^3-9\cdot(-2,6)^2-14\cdot(-2,6)+60=0,408$ $\Rightarrow$ v intervalu $(-3;-2,6)$ je alespoň jeden kořen.
$x=-2,65$
$2\cdot(-2,65)^3-9\cdot(-2,65)^2-14\cdot(-2,65)+60=-3,3..$ $\Rightarrow$ kořen je v intervalu $(-2,65;-2,6)$
$\Rightarrow$ zaokrouhleno na jedno desetinné místo má hledaný kořen hodnotu $x=-2,6$.

$x=3$
$2\cdot(3)^3-9\cdot(3)^2-14\cdot(3)+60=-9$ $\Rightarrow$ rovnice má ještě dva kořeny:

- v intervalu $(0;3)$ - přesná hodnota 2,5,
- v intervalu $(3;\infty)$ - přibližná hodnota 4,6.

S přesností na deset desetinných míst můžeme napsat
$K=\{-2,605551275;\ \ 2,5;\ \ 4,605551275\}$.

2. Metoda snížení stupně uhádnutím kořene (kořenů)
U kvadratických rovnic:
Když rozložíme rovnici na součin, najdeme kořeny:
$x^2-3x-4=0 \Rightarrow (x-4)(x+1)=0 \Rightarrow x_1=4$, $x_2=-1$.
Opačně, když najdeme kořeny, můžeme trojčlen rozložit na součin.

Máme rovnici: $x^3-6x^2+11x-6=0$.
Zkusíme uhádnout dosazováním jeden z kořenů a využít ho na rozklad $\Rightarrow$ druhá část rozkladu bude už pouze kvadratická a půjde řešit vzorcem.
Hledáme kořen: zkoušíme čísla, která se snadno dosazují - 0,1,-1,2,-2 atd. (většinou nemá smysl zkoušet za 3 a –3).
Snadno uhádneme, že jeden z kořenů je 1: $1^3-6\cdot 1^2+11\cdot 1-6=0$.
Musí platit: $x^3-6x^2+11x-6=(x-x_1)(x^2+px+q)=(x-1)(x^2+px+q)$.

Problém: Neznáme druhý člen v rozkladu. Jak určit čísla p a q ?

a) vydělením

Upravíme rovnost: $x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x^2+px+q) \quad /:(x-1)$

$$\left(x^3-6x^2+11x-6\right):(x-1)=(x^2+px+q)$$

Vydělíme: $(x^3-6x^2+11-6):(x-1)=x^2-5x+6$

$$\begin{array}{l} -(x^3-x^2) \\ \quad -5x^2+11x-6 \\ \quad -(-5x^2+5x) \\ \qquad 6x-6 \\ \qquad -(6x-6) \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

0 (když nevyjde zbytek 0, pak jsme špatně dělili nebo hádali kořen)

$$\left(x^3-6x^2+11x-6\right)=(x-1)(x^2-5x+6)=0$$

$$(x-1)(x-2)(x-3)=0 \Rightarrow K=\{1,2,3\}$$

b) zpětným násobení

$$x^3-6x^2+11x-6=0$$

$$(x-1)(x^2+px+q)=0$$

Jde o dvě shodné rovnice, když součin v druhé rovnici roznásobíme, musí se rovnat.

$$(x-1)(x^2+px+q)=x^3+px^2+qx-x^2-px-q=x^3+x^2(p-1)+x(q-p)-q=0$$

Teď napíšeme rovnice pod sebe a srovnáme je:

$$\begin{array}{l} x^3 \quad -6x^2 \quad +11x \quad -6=0 \\ x^3+x^2(p-1)+x(q-p)-q=0 \end{array}.$$

Aby byly rovnice stejné musí být před stejnými mocninami x stejná čísla:

$$\begin{array}{lll} -6=p-1 & 11=q-p & -6=-q \\ -5=p & 11=q-(-5) & 6=q \\ & 6=q & \end{array}$$

Máme 3 rovnice pro 2 neznámé $\Rightarrow$ poslední rovnice je kontrola správnosti předchozích kroků, musí nám vyjít.

$$\left(x^3-6x^2+11x-6\right)=(x-1)(x^2-5x+6)=0$$

$$(x-1)(x-2)(x-3)=0 \Rightarrow K=\{1,2,3\}$$

Pedagogická poznámka: Při řešení následujících příkladů náhodně střídám obě metody. Po studentech chci, aby si obě alespoň jednou samostatně vyzkoušeli a pak mohou používat tu, která jim více vyhovuje.

Př. 3: Vyřeš rovnici $x^3+3x^2+x-2=0$.

Hádáme kořen: $x_1=-2$.

$$x^3+3x^2+x-2=(-2)^3+3(-2)^2+(-2)-2=-8+12-2-2=0$$

Hledáme rozklad pomocí zpětného násobení:

$$x^3+3x^2+x-2=(x+2)\left(x^2+px+q\right)=x^3+px^2+qx+2x^2+2px+2q$$

$x^3 + \quad 3x^2 + \quad 1x \quad -2 = 0$

$x^3 + (p+2)x^2 + (q+2p)x + 2q = 0$

$3 = p+2$ $\qquad 1 = q+2p$ $\qquad -2 = 2q$

$1 = p$ $\qquad 1 = q+2$ $\qquad -1 = q$

$-1 = q$

$x^3 + 3x^2 + x - 2 = (x+2)(x^2 + x - 1)$.

Určíme kořeny rovnice $x^2 + x - 1 = 0$:

$$x_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ $\qquad x_3 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

$$K = \left\{-2; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$$

Pedagogická poznámka: Při řešení následujících příkladů se snažím, aby se studenti samostatně snažili vyrovnat s problémy, které přinášejí (6 před x^3 v příkladu 4 a x^4 v dalších příkladech). Jde o cvičení adaptace na částečně se měnící podmínky.

Př. 4: Vyřeš rovnici $6x^3 - 7x^2 - x + 2 = 0$.

Hádáme kořen: $x_1 = 1$.

$6x^3 - 7x^2 - x + 2 = 6 \cdot 1^3 - 7 \cdot 1^2 - 1 + 2 = 6 - 7 - 1 + 2 = 0$.

Hledáme rozklad pomocí dělení mnohočlenů:

$$\begin{array}{l}
(6x^3 - 7x^2 - x + 2) : (x-1) = 6x^2 - x - 2 \\
-(6x^3 - 6x^2) \\
\qquad -x^2 - x + 2 \\
\quad -(-x^2 + x) \\
\qquad\quad -2x + 2 \\
\qquad -(-2x + 2) \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$(6x^3 - 7x^2 - x + 2) = (x-1)(6x^2 - x - 2)$.

Určíme kořeny rovnice $6x^2 - x - 2 = 0$:

$$x_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 6 \cdot (-2)}}{12} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{12} = \frac{1 \pm 7}{12}$$

$x_2 = \frac{1+7}{12} = \frac{2}{3}$ $\qquad x_3 = \frac{1-7}{12} = -\frac{1}{2}$

$$K = \left\{1; \frac{2}{3}; -\frac{1}{2}\right\}$$

Poznámka: Pokud bychom zjišťovali rozklad zpětným násobením, musíme dát pozor:
$\left(6x^3-7x^2-x+2\right)=\left(x-1\right)\left(6x^2+px+q\right)=6x^3+px^2+qx-6x^2-px-q$ a dál jako předtím.

Před x^2 v hledaném kvadratickém trojčlenu musí být 6, abychom po zpětném násobení získali $6x^3$.

Pedagogická poznámka: Někteří studenti sami (a to je třeba ocenit) zjistí, že 6 před x^3 může způsobit problémy a rovnici vydělí šesti. Tím vyřeší problém se šestkou, ale v rovnici se objeví zlomky, které komplikují výpočty. Řešíme potom, který ze způsobů řešení je z hlediska snadnosti výpočtu nejvýhodnější.

Př. 5: Vyřeš rovnici $x^4-6x^3+8x^2+6x-9=0$.

Hádáme kořen: $x_1=1$.

$x^4-6x^3+8x^2+6x-9=1^4-6\cdot1^3+8\cdot1^2+6\cdot1-9=1-6+8+6-9=0$

Musíme uhádnout ještě jeden kořen, abychom stupeň rovnice snížili o dva.

Hádáme kořen: $x_1=-1$.

$x^4-6x^3+8x^2+6x-9=\left(-1\right)^4-6\cdot\left(-1\right)^3+8\cdot\left(-1\right)^2+6\cdot\left(-1\right)-9=1+6+8-6-9=0$

Hledáme rozklad pomocí zpětného násobeni:

$x^4-6x^3+8x^2+6x-9=\left(x+1\right)\left(x-1\right)\left(x^2+px+q\right)=\left(x^2-1\right)\left(x^2+px+q\right)$

$=x^4+px^3+qx^2-x^2-px-q$

$x^4-6x^3+8x^2+6x-9=0$

$x^4+px^3+\left(q-1\right)x^2-px-q=0$

$-6=p$ $8=q-1$, $9=q$ $6=-p$, $-6=p$ $-9=-q$, $9=q$

$x^4-6x^3+8x^2+6x-9=\left(x+1\right)\left(x-1\right)\left(x^2-6x+9\right)=0$

Určíme kořeny rovnice $x^2-6x+9=0$: $x^2-6x+9=\left(x-3\right)^2\Rightarrow x_3=x_4=3$

$K=\left\{1;-1;3\right\}$

Pedagogická poznámka: Příklad je možné řešit také ve dvou krocích vždy o jeden stupeň. V takovém případě budeme při roznásobování hledat kubický čtyřčlen x^3+px^2+qx+r.

Př. 6: Vyřeš rovnici $2x^4-4x^3-3x^2+7x-2=0$.

Hádáme kořen: $x_1=1$.

$2x^4-4x^3-3x^2+7x-2=2\cdot1^4-4\cdot1^3-3\cdot1^2+7\cdot1-2=2-4-3+7-2=0$

Musíme uhádnout ještě jeden kořen, abychom stupeň rovnice snížili o dva.

Hádáme kořen: $x_1=2$.

$2x^4-4x^3-3x^2+7x-2=2\cdot2^4-4\cdot2^3-3\cdot2^2+7\cdot2-2=32-32-12+14-2=0$

Hledáme rozklad pomocí zpětného násobeni:

$$2x^4-4x^3-3x^2+7x-2=(x-1)(x-2)\left(2x^2+px+q\right)=\left(x^2-3x+2\right)\left(2x^2+px+q\right)$$
$$=2x^4+px^3+qx^2-6x^3-3px^2-3qx+4x^2+2px+2q=$$
$$=2x^4+(p-6)x^3+(q-3p+4)x^2+(-3q+2p)x+2q$$
$$2x^4 \quad -4x^3 \quad -3x^2 \quad +7x-2=0$$
$$2x^4+(p-6)x^3+(q-3p+4)x^2+(-3q+2p)x+2q=0$$

$-4=p-6$	$-3=q-3p+4$	$7=-3q+2p$	$-2=2q$
$2=p$	$-3=q-3\cdot2+4$	$7=-3\cdot(-1)+2\cdot2$	$-1=q$
	$-1=q$	$7=7$	

$$2x^4-4x^3-3x^2+7x-2=(x-1)(x-2)\left(2x^2+2x-1\right)$$

Určíme kořeny rovnice $2x^2+2x-1=0$:

$$x_{3,4}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot2\cdot(-1)}}{2\cdot2}=\frac{-2\pm\sqrt{12}}{4}=\frac{-2\pm2\sqrt{3}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$$

$$x_3=\frac{-1-\sqrt{3}}{2} \qquad x_4=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$$

$$K=\left\{\frac{-1-\sqrt{3}}{2};\frac{-1+\sqrt{3}}{2};1;2\right\}$$

Př. 7: Vyřeš rovnici $12x^4-25x^3-5x^2+25x-7=0$.

Hádáme kořen: $x_1=1$.

$$12x^4-25x^3-5x^2+25x-7=12\cdot1^4-25\cdot1^3-5\cdot1^2+25\cdot1-7=12-25-5+25-7=0$$

Hledáme rozklad pomocí dělení mnohočlenů:

$$\left(12x^4-25x^3-5x^2+25x-7\right):(x-1)=12x^3-13x^2-18x+7$$
$$-\left(12x^4-12x^3\right)$$
$$-13x^3-5x^2+25x-7$$
$$-\left(-13x^3+13x^2\right)$$
$$-18x^2+25x-7$$
$$-\left(-18x^2+18x\right)$$
$$7x-7$$
$$-(7x-7)$$
$$0$$

$$12x^4-25x^3-5x^2+25x-7=(x-1)\left(12x^3-13x^2-18x+7\right)\Rightarrow$$

Řešíme rovnici: $12x^3-13x^2-18x+7=0$.

Hádáme kořen: $x_2=-1$.

$$12x^3-13x^2-18x+7=12\cdot(-1)^3-13\cdot(-1)^2-18\cdot(-1)+7=-12-13+18+7=0$$

Hledáme rozklad pomocí dělení mnohočlenů:

$$\left(12x^3-13x^2-18x+7\right):(x+1)=12x^2-25x+7$$
$$-\left(12x^3+12x^2\right)$$
$$-25x^2-18x+7$$
$$-\left(-25x^2-25x\right)$$
$$7x+7$$
$$-(7x+7)$$
$$0$$
$$\left(12x^3-13x^2-18x+7=0\right)=(x+1)\left(12x^2-25x+7\right)$$

Určíme kořeny rovnice $12x^2-25x+7=0$:

$$x_{3,4}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{25\pm\sqrt{625-(4\cdot12\cdot7)}}{24}=\frac{25\pm\sqrt{289}}{24}=\frac{25\pm17}{24}$$

$$x_3=\frac{25+17}{24}=1\frac{3}{4} \qquad x_4=\frac{25-17}{24}=\frac{1}{3}$$

$$K=\left\{1;-1;1\frac{3}{4};\frac{1}{3}\right\}$$

Rovnice druhé a třetího řádu můžeme řešit také na některých kalkulačkách (jde o vyšší typy vědeckých kalkulátorů, které jsou zakázány u státních maturit).
Následující postup platí pro kalkulačky CASIO (konkrétně typ fx-570MS)

- Tlačítkem MODE přepínáme dokud se na display neobjeví mód pro řešení rovnic EQN.
- Přepneme do tohoto módu odpovídajícím tlačítkem (v našem případě 1).
- Nevolíme počet neznámých (otázka Unknowns?), ale přejdeme doprava na další nabídku tlačítkem REPLAY.
- Zvolíme stupeň (otázka Degree?).
- Na display se objeví dotaz na jednotlivé koeficienty soustavy (jako první*a*), zadání koeficientů ukončujeme tlačítkem =.
- Koeficienty se zadávají z následujících tvarů rovnic:
  $ax^2+bx+c=0$,
  $ax^3+bx^2+cx+d=0$.
- Po zadání posledního koeficientu zobrazí kalkulačka kořeny rovnice.

Například pro rovnici $6x^3-7x^2-x+2=0$ získáme řešení $K=\left\{1;-\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right\}$.

Př. 8: Vyřeš na kalkulačce rovnici $x^3-9x^2+24x-20=0$. Zhodnoť výsledek.

Kalkulačka CASIO fx-570MS najde dva kořeny: 2 a 5.
Počet kořenů je překvapivý. U rovnice třetího řádu bychom očekávali tři kořeny (příklady, které jsme počítali) nebo jeden kořen (po vydělení získáme kvadratickou rovnici, která nemá řešení).
Zkusíme využít výsledek z kalkulátoru a vyřešit rovnici tak, jako v předchozích příkladech.
Protože kořenem je číslo 2, můžeme levou stranu rozložit (například dělením):

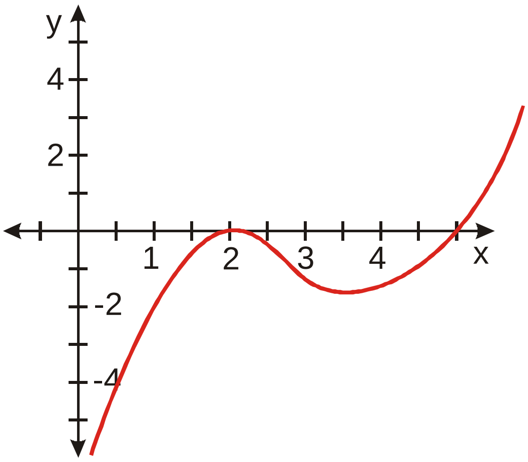
$$\left(x^3-9x^2+24x-20\right):\left(x-2\right)=x^2-7x+10$$
$$-\left(x^3-2x^2\right)$$
$$-7x^2+24x-20$$
$$-\left(-7x^2+14x\right)$$
$$10x-20$$
$$-\left(10x-20\right)$$
$$0$$

Získaný trojčlen můžeme rozložit z hlavy $\left(x^2-7x+10\right)=\left(x-2\right)\left(x-5\right)$.

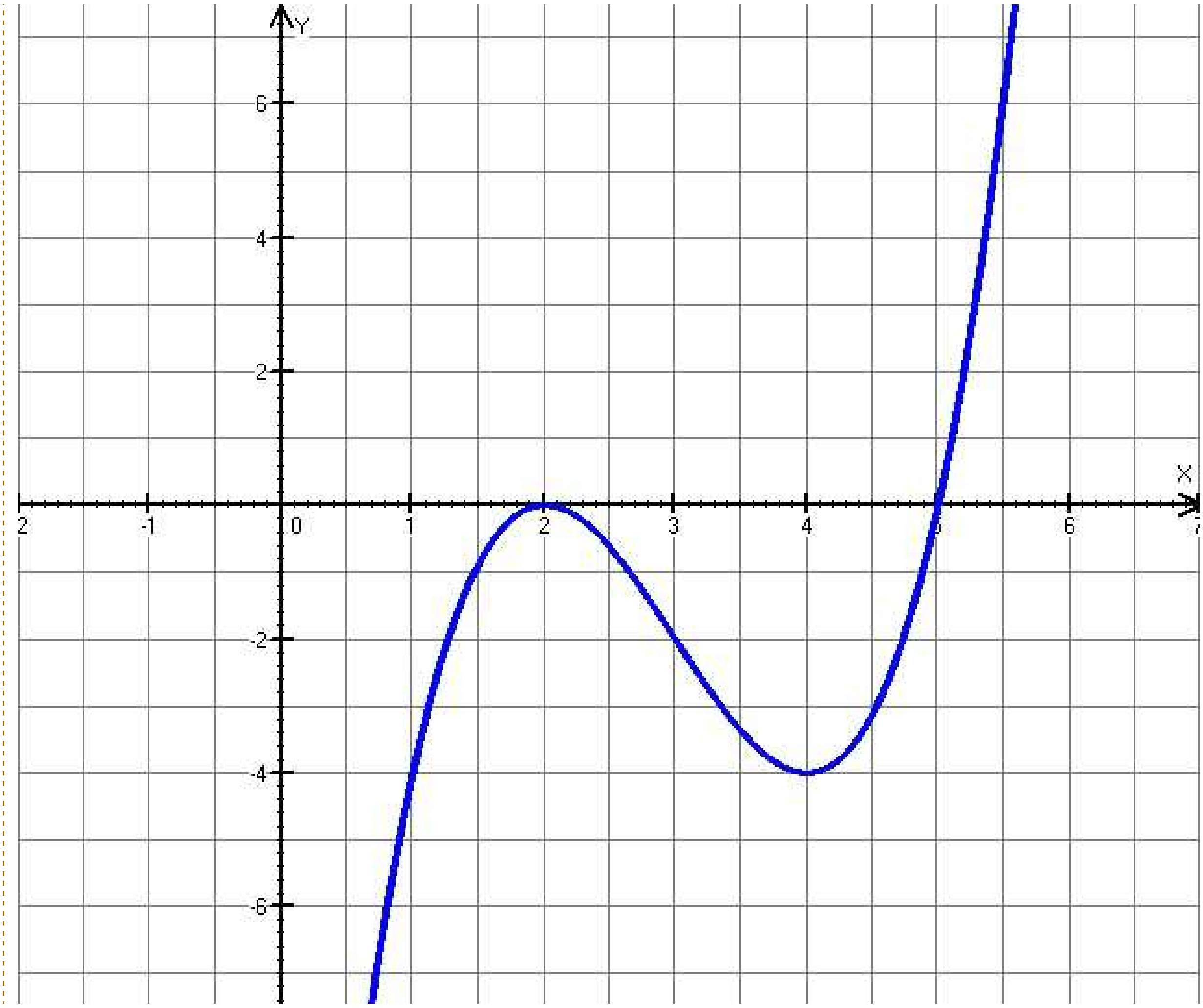
Celá rovnice: $\left(x^3-9x^2+24x-20\right)=\left(x-2\right)\left(x-2\right)\left(x-5\right)$ $\Rightarrow$ číslo 2 je kořenem rovnice dvakrát (dvojnásobný kořen).

Př. 9: Načrtni graf funkce $x^3-9x^2+24x-20=0$. Využij výsledky předchozího příkladu.

Pro velká záporná čísla má funkce určitě záporné hodnoty. Prochází osou *x* v bodech $[2;0]$ a $[5;0]$. Pro velká kladná čísla se hodnoty blíží k nekonečnu. Osou *y* prochází v bodě $[0;-20]$. Pokud máme všechny podmínky splnit, musí se graf v bodě $[2;0]$ dotýkat osy *x* zespodu.



Odhad si můžeme ověřit grafem z počítače.



Shrnutí: Rovnice třetího nebo vyššího řádu už neřešíme pomocí vzorců.