

2.7.7 Rovnice vyšších řádů (snížení stupně)

Předpoklady: 020706

Další metodou řešení rovnic vyššího stupně je metoda snížení stupně uhádnutím kořene.

U kvadratických rovnic:

Když rozložíme rovnici na součin, najdeme kořeny:

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+1) = 0 \Rightarrow x_1 = 4, x_2 = -1.$$

Opačně, když najdeme kořeny, můžeme trojčlen rozložit na součin.

Máme rovnici: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.

Zkusíme uhádnout dosazováním jeden z kořenů a využít ho na rozklad \Rightarrow druhá část rozkladu bude už pouze kvadratická a půjde i v nejhorším případě řešit vzorcem.

Hledáme kořen: zkusíme čísla, která se snadno dosazují - 0, 1, -1, 2, -2 atd. (většinou nemá smysl zkoušet čísla s větší absolutní hodnotou než 3).

Snadno uhádneme, že jeden z kořenů je 1: $1^3 - 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 6 = 0$.

Musí platit: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - x_1)(x^2 + px + q) = (x - 1)(x^2 + px + q)$.

Problém: Neznáme druhý člen v rozkladu. Jak určit čísla p a q ?

a) vydělením

Upravíme rovnost: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x^2 + px + q) \quad / : (x - 1)$

$$(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x - 1) = (x^2 + px + q)$$

Vydělíme: $(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x - 1) = x^2 - 5x + 6$

$$-(x^3 - x^2)$$

$$-5x^2 + 11x - 6$$

$$-(-5x^2 + 5x)$$

$$6x - 6$$

$$-(6x - 6)$$

0 (když nevyjde zbytek 0, pak jsme špatně dělili nebo hádali kořen)

$$(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) = (x - 1)(x^2 - 5x + 6) = 0$$

$$(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0 \Rightarrow K = \{1, 2, 3\}$$

b) zpětným násobením

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

$$(x - 1)(x^2 + px + q) = 0$$

Jde o dvě shodné rovnice, když součin v druhé rovnici roznásobíme, musí se rovnat.

$$(x - 1)(x^2 + px + q) = x^3 + px^2 + qx - x^2 - px - q = x^3 + x^2(p - 1) + x(q - p) - q = 0$$

Teď napíšeme rovnice pod sebe a srovnáme je:

$$x^3 \quad -6x^2 \quad +11x \quad -6 = 0$$

$$x^3 + x^2(p - 1) + x(q - p) - q = 0$$

Aby byly rovnice stejné musí být před stejnými mocninami x stejná čísla:

$$\begin{array}{lll}
 -6 = p - 1 & 11 = q - p & -6 = -q \\
 -5 = p & 11 = q - (-5) & 6 = q \\
 & 6 = q &
 \end{array}$$

Máme 3 rovnice pro 2 neznámé \Rightarrow poslední rovnice je kontrola správnosti předchozích kroků, musí nám vyjít.

$$(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) = (x-1)(x^2 - 5x + 6) = 0$$

$$(x-1)(x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow K = \{1, 2, 3\}$$

Př. 1: Vyřeš metodou snížení stupně rovnici $x^3 + 3x^2 + x - 2 = 0$. K určení kvadratického trojčlenu použij dělení mnohočlenů.

Hádáme kořen: $x_1 = -2$.

$$x^3 + 3x^2 + x - 2 = (-2)^3 + 3(-2)^2 + (-2) - 2 = -8 + 12 - 2 - 2 = 0$$

Hledáme rozklad pomocí dělení mnohočlenů:

$$\begin{array}{r}
 (x^3 + 3x^2 + x - 2) : (x + 2) = x^2 + x - 1 \\
 -(x^3 + 2x^2) \\
 \hline
 x^2 + x - 2 \\
 -(x^2 + 2x) \\
 \hline
 -x - 2 \\
 -(-x - 2) \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

$$x^3 + 3x^2 + x - 2 = (x + 2)(x^2 + x - 1).$$

Určíme kořeny rovnice $x^2 + x - 1 = 0$:

$$x_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad x_3 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}.$$

$$K = \left\{ -2; \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right\}$$

Dodatek: Kvadratický trojčlen je samozřejmě možné určit i zpětným násobením.

$$x^3 + 3x^2 + x - 2 = (x + 2)(x^2 + px + q) = x^3 + px^2 + qx + 2x^2 + 2px + 2q$$

$$x^3 + 3x^2 + 1x - 2 = 0$$

$$x^3 + (p+2)x^2 + (q+2p)x + 2q = 0$$

$$\begin{array}{rcl}
 3 = p + 2 & 1 = q + 2p & -2 = 2q \\
 1 = p & 1 = q + 2 & -1 = q \\
 & -1 = q &
 \end{array}$$

$$x^3 + 3x^2 + x - 2 = (x + 2)(x^2 + x - 1).$$

Pedagogická poznámka: U žáků, kteří mají problém s předchozím příkladem, je třeba nejdříve zjistit, zda vůbec pochopili celý algoritmus a je jim jasné, proč jednotlivé kroky dělají. Nejlepší je nechat je napsat klíčové kroky algoritmu a pak o nich diskutovat.

Pedagogická poznámka: Při řešení následujících příkladů se snažím, aby se studenti samostatně snažili vyrovnat s problémy, které přinášejí. Proto je v příkladu 5 vyžadováno zpětné násobení (při dělení žádný problém nevzniká). V dalších příkladech je třeba se vyrovnat s vyšším stupněm rovnice.

Př. 2: Vyřeš metodou snížení stupně rovnici $6x^3 - 7x^2 - x + 2 = 0$. K určení kvadratického trojčlenu použij zpětné násobení.

Hádáme kořen: $x_1 = 1$.

$$6x^3 - 7x^2 - x + 2 = 6 \cdot 1^3 - 7 \cdot 1^2 - 1 + 2 = 6 - 7 - 1 + 2 = 0.$$

Hledáme rozklad pomocí zpětného násobení:

$$6x^3 - 7x^2 - x + 2 = (x - 1)(6x^2 + px + q)$$

V hledaném trojčlenu musí být před x^2 koeficient 6, abychom po zpětném roznásobení dostali $6x^3$.

$$6x^3 - 7x^2 - x + 2 = (x - 1)(6x^2 + px + q) = 6x^3 + px^2 + qx - 6x^2 - px - q$$

$$6x^3 \quad -7x^2 \quad -1x + 2 = 0$$

$$6x^3 + (p - 6)x^2 + (q - p)x - q = 0$$

$$-7 = p - 6 \quad -1 = q - p \quad 2 = -q$$

$$-1 = p \quad -1 = q + 1 \quad -2 = q$$

$$-2 = q$$

$$(6x^3 - 7x^2 - x + 2) = (x - 1)(6x^2 - x - 2).$$

Určíme kořeny rovnice $6x^2 - x - 2 = 0$:

$$x_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 6 \cdot (-2)}}{12} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{12} = \frac{1 \pm 7}{12}$$

$$x_2 = \frac{1 + 7}{12} = \frac{2}{3} \quad x_3 = \frac{1 - 7}{12} = -\frac{1}{2}$$

$$K = \left\{ 1; \frac{2}{3}; -\frac{1}{2} \right\}$$

Dodatek: Kvadratický trojčlen můžeme určit také pomocí dělení mnohočlenů:

$$\begin{array}{r}
 (6x^3 - 7x^2 - x + 2) : (x - 1) = 6x^2 - x - 2 \\
 -(6x^3 - 6x^2) \\
 \hline
 -x^2 - x + 2 \\
 -(-x^2 + x) \\
 \hline
 -2x + 2 \\
 -(-2x + 2) \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Pedagogická poznámka: Někteří studenti sami (a to je třeba ocenit) zjistí, že 6 před x^3 může způsobit problémy a rovnici vydělí šesti. Tím vyřeší problém se šestkou, ale v rovnici se objeví zlomky, které komplikují výpočty. Řešíme potom, který ze způsobů řešení je z hlediska snadnosti výpočtu nejvýhodnější.

Pedagogická poznámka: Při řešení následujících příkladů náhodně střídám obě metody. Po studentech chci, aby si obě alespoň jednou samostatně vyzkoušeli, a pak mohou používat tu, která jim více vyhovuje.

Př. 3: Vyřeš metodou snížení stupně rovnici $x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9 = 0$.

Hádáme kořen: $x_1 = 1$.

$$x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9 = 1^4 - 6 \cdot 1^3 + 8 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 - 9 = 1 - 6 + 8 + 6 - 9 = 0$$

Musíme uhádnout ještě jeden kořen, abychom stupeň rovnice snížili o dva.

Hádáme kořen: $x_1 = -1$.

$$x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9 = (-1)^4 - 6 \cdot (-1)^3 + 8 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) - 9 = 1 + 6 + 8 - 6 - 9 = 0$$

Hledáme rozklad pomocí zpětného násobení:

$$x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9 = (x+1)(x-1)(x^2 + px + q) = (x^2 - 1)(x^2 + px + q)$$

$$= x^4 + px^3 + qx^2 - x^2 - px - q$$

$$x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9 = 0$$

$$x^4 + px^3 + (q-1)x^2 - px - q = 0$$

$$\begin{array}{rclcl}
 -6 = p & 8 = q - 1 & 6 = -p & -9 = -q \\
 9 = q & -6 = p & 9 = q
 \end{array}$$

$$x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9 = (x+1)(x-1)(x^2 - 6x + 9) = 0$$

Určíme kořeny rovnice $x^2 - 6x + 9 = 0$: $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 \Rightarrow x_3 = x_4 = 3$

$$K = \{1; -1; 3\}$$

Pedagogická poznámka: Příklad je možné řešit také ve dvou krocích vždy o jeden stupeň.

V takovém případě budeme při roznásobování hledat kubický čtyřčlen

$$x^3 + px^2 + qx + r.$$

Př. 4: Vyřeš metodou snížení stupně rovnici $2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 7x - 2 = 0$.

Hádáme kořen: $x_1 = 1$.

$$2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 7x - 2 = 2 \cdot 1^4 - 4 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 7 \cdot 1 - 2 = 2 - 4 - 3 + 7 - 2 = 0$$

Musíme uhádnout ještě jeden kořen, abychom stupeň rovnice snížili o dva.

Hádáme kořen: $x_1 = 2$.

$$2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 7x - 2 = 2 \cdot 2^4 - 4 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2 - 2 = 32 - 32 - 12 + 14 - 2 = 0$$

Hledáme rozklad pomocí zpětného násobení:

$$2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 7x - 2 = (x-1)(x-2)(2x^2 + px + q) = (x^2 - 3x + 2)(2x^2 + px + q)$$

$$= 2x^4 + px^3 + qx^2 - 6x^3 - 3px^2 - 3qx + 4x^2 + 2px + 2q =$$

$$= 2x^4 + (p-6)x^3 + (q-3p+4)x^2 + (-3q+2p)x + 2q$$

$$2x^4 \quad -4x^3 \quad -3x^2 \quad +7x - 2 = 0$$

$$2x^4 + (p-6)x^3 + (q-3p+4)x^2 + (-3q+2p)x + 2q = 0$$

$$\begin{array}{rcll} -4 = p-6 & -3 = q-3p+4 & 7 = -3q+2p & -2 = 2q \\ 2 = p & -3 = q-3 \cdot 2+4 & 7 = -3 \cdot (-1)+2 \cdot 2 & -1 = q \\ & -1 = q & 7 = 7 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcll} -4 = p-6 & -3 = q-3p+4 & 7 = -3q+2p & -2 = 2q \\ 2 = p & -3 = q-3 \cdot 2+4 & 7 = -3 \cdot (-1)+2 \cdot 2 & -1 = q \\ & -1 = q & 7 = 7 & \end{array}$$

$$2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 7x - 2 = (x-1)(x-2)(2x^2 + 2x - 1)$$

Určíme kořeny rovnice $2x^2 + 2x - 1 = 0$:

$$x_{3,4} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{4} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$$x_3 = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \quad x_4 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$$

$$K = \left\{ \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}; 1; 2 \right\}$$

Př. 5: Vyřeš metodou snížení stupně rovnici $12x^4 - 25x^3 - 5x^2 + 25x - 7 = 0$.

Hádáme kořen: $x_1 = 1$.

$$12x^4 - 25x^3 - 5x^2 + 25x - 7 = 12 \cdot 1^4 - 25 \cdot 1^3 - 5 \cdot 1^2 + 25 \cdot 1 - 7 = 12 - 25 - 5 + 25 - 7 = 0$$

Hledáme rozklad pomocí dělení mnohočlenů:

$$\begin{aligned}
& (12x^4 - 25x^3 - 5x^2 + 25x - 7) : (x-1) = 12x^3 - 13x^2 - 18x + 7 \\
& -(12x^4 - 12x^3) \\
& \quad -13x^3 - 5x^2 + 25x - 7 \\
& \quad -(-13x^3 + 13x^2) \\
& \quad \quad -18x^2 + 25x - 7 \\
& \quad \quad -(-18x^2 + 18x) \\
& \quad \quad \quad 7x - 7 \\
& \quad \quad \quad -(7x - 7) \\
& \quad \quad \quad \quad 0
\end{aligned}$$

$$12x^4 - 25x^3 - 5x^2 + 25x - 7 = (x-1)(12x^3 - 13x^2 - 18x + 7) \Rightarrow$$

Řešíme rovnici: $12x^3 - 13x^2 - 18x + 7 = 0$.

Hádáme kořen: $x_2 = -1$.

$$12x^3 - 13x^2 - 18x + 7 = 12 \cdot (-1)^3 - 13 \cdot (-1)^2 - 18 \cdot (-1) + 7 = -12 - 13 + 18 + 7 = 0$$

Hledáme rozklad pomocí dělení mnohočlenů:

$$\begin{aligned}
& (12x^3 - 13x^2 - 18x + 7) : (x+1) = 12x^2 - 25x + 7 \\
& -(12x^3 + 12x^2) \\
& \quad -25x^2 - 18x + 7 \\
& \quad -(-25x^2 - 25x) \\
& \quad \quad 7x + 7 \\
& \quad \quad -(7x + 7) \\
& \quad \quad \quad 0
\end{aligned}$$

$$(12x^3 - 13x^2 - 18x + 7 = 0) = (x+1)(12x^2 - 25x + 7)$$

Určíme kořeny rovnice $12x^2 - 25x + 7 = 0$:

$$x_{3,4} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{25 \pm \sqrt{625 - (4 \cdot 12 \cdot 7)}}{24} = \frac{25 \pm \sqrt{289}}{24} = \frac{25 \pm 17}{24}$$

$$x_3 = \frac{25+17}{24} = 1\frac{3}{4} \qquad x_4 = \frac{25-17}{24} = \frac{1}{3}$$

$$K = \left\{ 1; -1; 1\frac{3}{4}; \frac{1}{3} \right\}$$

Pedagogická poznámka: Závěr hodiny je určen pro žáky, kteří mají výpočty rovnic na kalkulačkách, ostatní řeší předchozí příklady.

Na závěr hodiny se ještě vrátíme k řešení rovnic na kalkulačkách.

Př. 6: Vyřeš na kalkulačce rovnici $x^3 - 9x^2 + 24x - 20 = 0$. Zhodnot' výsledek.

Kalkulačka CASIO fx-570MS najde dva kořeny: 2 a 5.

Počet kořenů je překvapivý. U rovnice třetího řádu bychom očekávali tři kořeny (příklady, které jsme počítali) nebo jeden kořen (po vydělení získáme kvadratickou rovnici, která nemá řešení).

Zkusíme využít výsledek z kalkulátoru a vyřešit rovnici tak jako v předchozích příkladech.

Protože kořenem je číslo 2, můžeme levou stranu rozložit (například dělením):

$$\begin{array}{r} (x^3 - 9x^2 + 24x - 20) : (x - 2) = x^2 - 7x + 10 \\ -(x^3 - 2x^2) \\ \hline -7x^2 + 24x - 20 \\ -(-7x^2 + 14x) \\ \hline 10x - 20 \\ -(10x - 20) \\ \hline 0 \end{array}$$

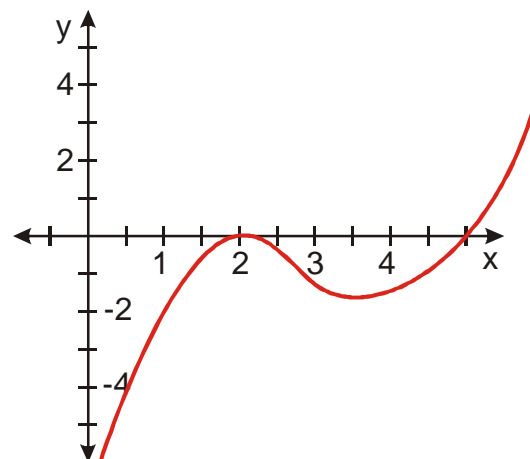
Získaný trojčlen můžeme rozložit z hlavy $(x^2 - 7x + 10) = (x - 2)(x - 5)$.

Celá rovnice: $(x^3 - 9x^2 + 24x - 20) = (x - 2)(x - 2)(x - 5) \Rightarrow$ číslo 2 je kořenem rovnice dvakrát (dvojnásobný kořen).

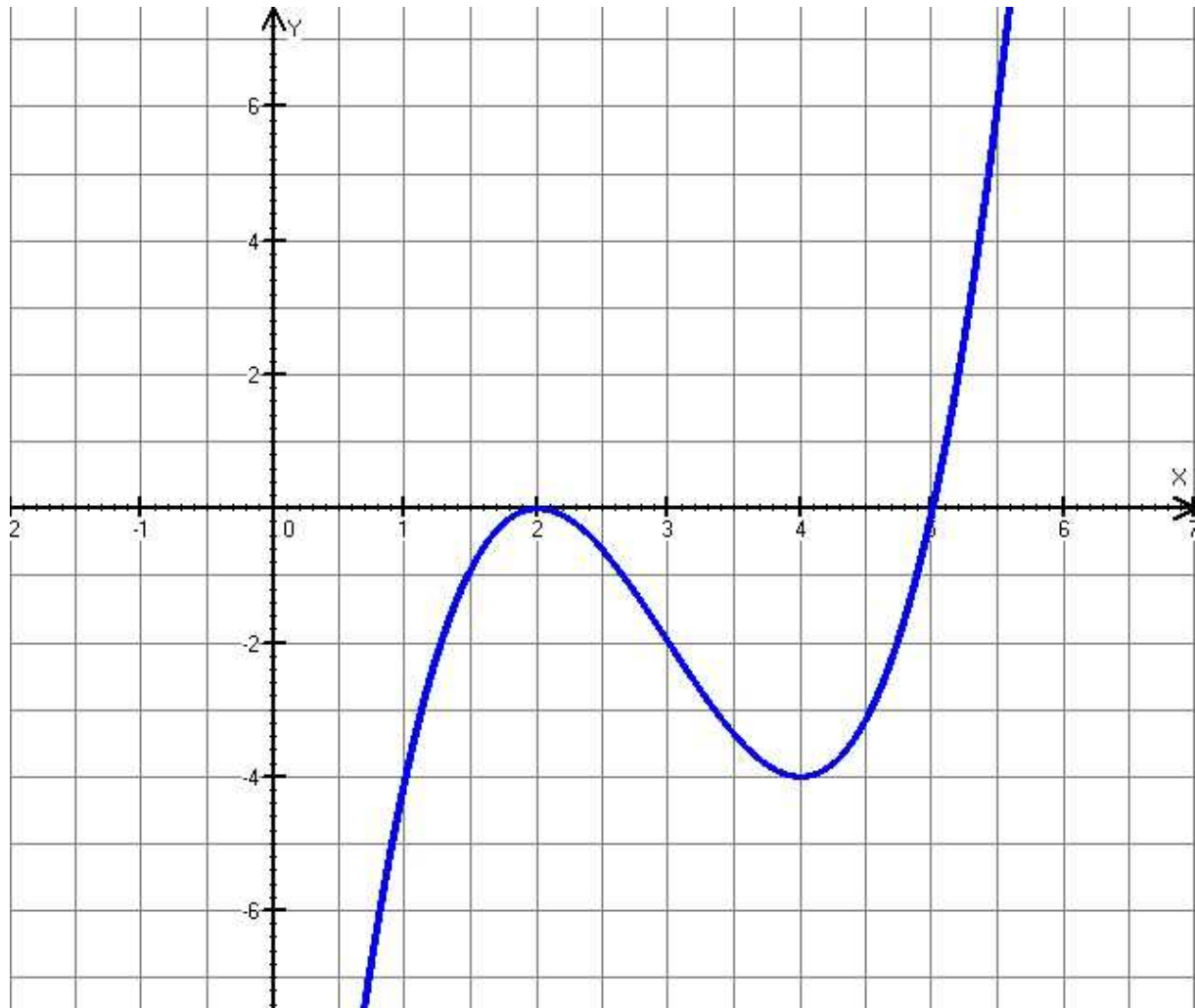
Př. 7: Načrtni graf funkce $x^3 - 9x^2 + 24x - 20 = 0$. Využij výsledky předchozího příkladu.

Pro velká záporná čísla má funkce určitě záporné hodnoty. Prochází osou x v bodech $[2; 0]$ a $[5; 0]$. Pro velká kladná čísla se hodnoty blíží k nekonečnu. Osou y prochází v bodě $[0; -20]$

Pokud máme všechny podmínky splnit, musí se graf v bodě $[2; 0]$ dotýkat osy x zespodu.



Odhad si můžeme ověřit grafem z počítače.



Dodatek: Souvislost mezi rovnicí a funkcí vede k jedné velice zajímavé otázce ohledně grafu kubických funkcí: Je možné, aby kubická funkce měla více než jednu „vlnku“?

Shrnutí: Rovnice třetího nebo vyššího řádu už neřešíme pomocí vzorců.