2.7.7 Rovnice vyšších řádů (snížení stupně)

Předpoklady: 020706

Další metodou řešení rovnic vyššího stupně je metoda snížení stupně uhádnutím kořene.

U kvadratických rovnic:
Když rozložíme rovnici na součin, najdeme kořeny:
$x^2-3x-4=0 \Rightarrow (x-4)(x+1)=0 \Rightarrow x_1=4,\ x_2=-1$.
Opačně, když najdeme kořeny, můžeme trojčlen rozložit na součin.

Máme rovnici: $x^3-6x^2+11x-6=0$.
Zkusíme uhádnout dosazováním jeden z kořenů a využít ho na rozklad $\Rightarrow$ druhá část rozkladu bude už pouze kvadratická a půjde i v nejhorším případě řešit vzorcem.
Hledáme kořen: zkoušíme čísla, která se snadno dosazují - 0,1,-1,2,-2 atd. (většinou nemá smysl zkoušet čísla s větší absolutní hodnotou než 3).
Snadno uhádneme, že jeden z kořenů je 1: $1^3-6\cdot 1^2+11\cdot 1-6=0$.
Musí platit: $x^3-6x^2+11x-6=(x-x_1)(x^2+px+q)=(x-1)(x^2+px+q)$.
Problém: Neznáme druhý člen v rozkladu. Jak určit čísla p a q ?
a) vydělením
Upravíme rovnost: $x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x^2+px+q) \quad /:(x-1)$

$$\left(x^3-6x^2+11x-6\right):(x-1)=(x^2+px+q)$$

Vydělíme: $(x^3-6x^2+11-6):(x-1)=x^2-5x+6$

$$
\begin{array}{l}
-(x^3-x^2) \\
\quad -5x^2+11x-6 \\
\quad -(-5x^2+5x) \\
\qquad\quad 6x-6 \\
\qquad\quad -(6x-6) \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

(když nevyjde zbytek 0, pak jsme špatně dělili nebo hádali kořen)

$$\left(x^3-6x^2+11x-6\right)=(x-1)(x^2-5x+6)=0$$

$$(x-1)(x-2)(x-3)=0 \Rightarrow K=\{1,2,3\}$$

b) zpětným násobení

$$x^3-6x^2+11x-6=0$$

$$(x-1)(x^2+px+q)=0$$

Jde o dvě shodné rovnice, když součin v druhé rovnici roznásobíme, musí se rovnat.
$(x-1)(x^2+px+q)=x^3+px^2+qx-x^2-px-q=x^3+x^2(p-1)+x(q-p)-q=0$
Teď napíšeme rovnice pod sebe a srovnáme je:

$$
\begin{array}{l}
x^3 \quad -6x^2 \quad +11x \quad -6=0 \\
x^3+x^2(p-1)+x(q-p)-q=0
\end{array}.
$$

Aby byly rovnice stejné musí být před stejnými mocninami x stejná čísla:

$-6 = p - 1$ $\qquad$ $11 = q - p$ $\qquad$ $-6 = -q$

$-5 = p$ $\qquad$ $11 = q - (-5)$ $\qquad$ $6 = q$

$6 = q$

Máme 3 rovnice pro 2 neznámé $\Rightarrow$ poslední rovnice je kontrola správnosti předchozích kroků, musí nám vyjít.

$$\left(x^3 - 6x^2 + 11x - 6\right) = (x-1)(x^2 - 5x + 6) = 0$$

$$(x-1)(x-2)(x-3) = 0 \;\Rightarrow\; K = \{1, 2, 3\}$$

Př. 1: Vyřeš metodou snížení stupně rovnici $x^3 + 3x^2 + x - 2 = 0$. K určení kvadratického trojčlenu použij dělení mnohočlenů.

Hádáme kořen: $x_1 = -2$.

$$x^3 + 3x^2 + x - 2 = (-2)^3 + 3(-2)^2 + (-2) - 2 = -8 + 12 - 2 - 2 = 0$$

Hledáme rozklad pomocí dělení mnohočlenů:

$$\left(x^3 + 3x^2 + x - 2\right) : (x+2) = x^2 + x - 1$$

$$-\left(x^3 + 2x^2\right)$$

$$x^2 + x - 2$$

$$-\left(x^2 + 2x\right)$$

$$-x - 2$$

$$-(-x - 2)$$

$$0$$

$$x^3 + 3x^2 + x - 2 = (x+2)\left(x^2 + x - 1\right).$$

Určíme kořeny rovnice $x^2 + x - 1 = 0$:

$$x_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \qquad x_3 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}.$$

$$K = \left\{-2; \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right\}$$

Dodatek: Kvadratický trojčlen je samozřejmě možné určit i zpětným násobením.

$$x^3 + 3x^2 + x - 2 = (x+2)\left(x^2 + px + q\right) = x^3 + px^2 + qx + 2x^2 + 2px + 2q$$

$$x^3 + \quad 3x^2 + \quad 1x \quad -2 = 0$$

$$x^3 + (p+2)x^2 + (q+2p)x + 2q = 0$$

$$3 = p + 2 \qquad 1 = q + 2p \qquad -2 = 2q$$
$$1 = p \qquad 1 = q + 2 \qquad -1 = q$$
$$-1 = q$$
$$x^3 + 3x^2 + x - 2 = (x+2)(x^2 + x - 1).$$

Pedagogická poznámka: U žáků, kteří mají problém s předchozím příkladem, je třeba nejdříve zjistit, zda vůbec pochopili celý algoritmus a je jim jasné, proč jednotlivé kroky dělají. Nejlepší je nechat je napsat klíčové kroky algoritmu a pak o nich diskutovat.

Pedagogická poznámka: Při řešení následujících příkladů se snažím, aby se studenti samostatně snažili vyrovnat s problémy, které přinášejí. Proto je v příkladu 5 vyžadováno zpětné násobení (při dělení žádný problém nevzniká). V dalších příkladech je třeba se vyrovnat s vyšším stupněm rovnice.

Př. 2: Vyřeš metodou snížení stupně rovnici $6x^3 - 7x^2 - x + 2 = 0$. K určení kvadratického trojčlenu použij zpětné násobení.

Hádáme kořen: $x_1 = 1$.
$$6x^3 - 7x^2 - x + 2 = 6 \cdot 1^3 - 7 \cdot 1^2 - 1 + 2 = 6 - 7 - 1 + 2 = 0.$$

Hledáme rozklad pomocí zpětného násobeni:
$$6x^3 - 7x^2 - x + 2 = (x-1)(6x^2 + px + q)$$
V hledaném trojčlenu musí být před x^2 koeficient 6, abychom po zpětném roznásobení dostali $6x^3$.
$$6x^3 - 7x^2 - x + 2 = (x-1)(6x^2 + px + q) = 6x^3 + px^2 + qx - 6x^2 - px - q$$

$$6x^3 \qquad -7x^2 \qquad -1x + 2 = 0$$
$$6x^3 + (p-6)x^2 + (q-p)x - q = 0$$
$$-7 = p - 6 \qquad -1 = q - p \qquad 2 = -q$$
$$-1 = p \qquad -1 = q + 1 \qquad -2 = q$$
$$-2 = q$$

$$(6x^3 - 7x^2 - x + 2) = (x-1)(6x^2 - x - 2).$$
Určíme kořeny rovnice $6x^2 - x - 2 = 0$:
$$x_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 6 \cdot (-2)}}{12} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{12} = \frac{1 \pm 7}{12}$$
$$x_2 = \frac{1+7}{12} = \frac{2}{3} \qquad x_3 = \frac{1-7}{12} = -\frac{1}{2}$$
$$K = \left\{1; \frac{2}{3}; -\frac{1}{2}\right\}$$

Dodatek: Kvadratický trojčlen můžeme určit také pomocí dělení mnohočlenů:

$$\left(6x^3-7x^2-x+2\right):\left(x-1\right)=6x^2-x-2$$
$$-\left(6x^3-6x^2\right)$$
$$-x^2-x+2$$
$$-\left(-x^2+x\right)$$
$$-2x+2$$
$$-\left(-2x+2\right)$$
$$0$$

Pedagogická poznámka: Někteří studenti sami (a to je třeba ocenit) zjistí, že 6 před x^3 může způsobit problémy a rovnici vydělí šesti. Tím vyřeší problém se šestkou, ale v rovnici se objeví zlomky, které komplikují výpočty. Řešíme potom, který ze způsobů řešení je z hlediska snadnosti výpočtu nejvýhodnější.

Pedagogická poznámka: Při řešení následujících příkladů náhodně střídám obě metody. Po studentech chci, aby si obě alespoň jednou samostatně vyzkoušeli a pak mohou používat tu, která jim více vyhovuje.

Př. 3: Vyřeš metodou snížení stupně rovnici $x^4-6x^3+8x^2+6x-9=0$.

Hádáme kořen: $x_1=1$.

$x^4-6x^3+8x^2+6x-9=1^4-6\cdot1^3+8\cdot1^2+6\cdot1-9=1-6+8+6-9=0$

Musíme uhádnout ještě jeden kořen, abychom stupeň rovnice snížili o dva.

Hádáme kořen: $x_1=-1$.

$x^4-6x^3+8x^2+6x-9=\left(-1\right)^4-6\cdot\left(-1\right)^3+8\cdot\left(-1\right)^2+6\cdot\left(-1\right)-9=1+6+8-6-9=0$

Hledáme rozklad pomocí zpětného násobeni:

$x^4-6x^3+8x^2+6x-9=\left(x+1\right)\left(x-1\right)\left(x^2+px+q\right)=\left(x^2-1\right)\left(x^2+px+q\right)$

$=x^4+px^3+qx^2-x^2-px-q$

$x^4-6x^3+\quad 8x^2+6x-9=0$

$x^4+px^3+\left(q-1\right)x^2-px-q=0$

$-6=p$	$8=q-1$	$6=-p$	$-9=-q$
	$9=q$	$-6=p$	$9=q$

$x^4-6x^3+8x^2+6x-9=\left(x+1\right)\left(x-1\right)\left(x^2-6x+9\right)=0$

Určíme kořeny rovnice $x^2-6x+9=0$: $x^2-6x+9=\left(x-3\right)^2 \Rightarrow x_3=x_4=3$

$K=\{1;-1;3\}$

Pedagogická poznámka: Příklad je možné řešit také ve dvou krocích vždy o jeden stupeň. V takovém případě budeme při roznásobování hledat kubický čtyřčlen x^3+px^2+qx+r.

Př. 4: Vyřeš metodou snížení stupně rovnici $2x^4-4x^3-3x^2+7x-2=0$.

Hádáme kořen: $x_1=1$.

$2x^4-4x^3-3x^2+7x-2=2\cdot1^4-4\cdot1^3-3\cdot1^2+7\cdot1-2=2-4-3+7-2=0$

Musíme uhádnout ještě jeden kořen, abychom stupeň rovnice snížili o dva.

Hádáme kořen: $x_1=2$.

$2x^4-4x^3-3x^2+7x-2=2\cdot2^4-4\cdot2^3-3\cdot2^2+7\cdot2-2=32-32-12+14-2=0$

Hledáme rozklad pomocí zpětného násobeni:

$2x^4-4x^3-3x^2+7x-2=(x-1)(x-2)(2x^2+px+q)=(x^2-3x+2)(2x^2+px+q)$

$=2x^4+px^3+qx^2-6x^3-3px^2-3qx+4x^2+2px+2q=$

$=2x^4+(p-6)x^3+(q-3p+4)x^2+(-3q+2p)x+2q$

$2x^4 \quad -4x^3 \quad -3x^2 \quad +7x-2=0$

$2x^4+(p-6)x^3+(q-3p+4)x^2+(-3q+2p)x+2q=0$

$-4=p-6$	$-3=q-3p+4$	$7=-3q+2p$	$-2=2q$
$2=p$	$-3=q-3\cdot2+4$	$7=-3\cdot(-1)+2\cdot2$	$-1=q$
	$-1=q$	$7=7$	

$2x^4-4x^3-3x^2+7x-2=(x-1)(x-2)(2x^2+2x-1)$

Určíme kořeny rovnice $2x^2+2x-1=0$:

$$x_{3,4}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot2\cdot(-1)}}{2\cdot2}=\frac{-2\pm\sqrt{12}}{4}=\frac{-2\pm2\sqrt{3}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$$

$x_3=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $x_4=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$

$$K=\left\{\frac{-1-\sqrt{3}}{2};\frac{-1+\sqrt{3}}{2};1;2\right\}$$

Př. 5: Vyřeš metodou snížení stupně rovnici $12x^4-25x^3-5x^2+25x-7=0$.

Hádáme kořen: $x_1=1$.

$12x^4-25x^3-5x^2+25x-7=12\cdot1^4-25\cdot1^3-5\cdot1^2+25\cdot1-7=12-25-5+25-7=0$

Hledáme rozklad pomocí dělení mnohočlenů:

$$\left(12x^4-25x^3-5x^2+25x-7\right):(x-1)=12x^3-13x^2-18x+7$$
$$-\left(12x^4-12x^3\right)$$
$$-13x^3-5x^2+25x-7$$
$$-\left(-13x^3+13x^2\right)$$
$$-18x^2+25x-7$$
$$-\left(-18x^2+18x\right)$$
$$7x-7$$
$$-(7x-7)$$
$$0$$

$$12x^4-25x^3-5x^2+25x-7=(x-1)\left(12x^3-13x^2-18x+7\right)\Rightarrow$$

Řešíme rovnici: $12x^3-13x^2-18x+7=0$.
Hádáme kořen: $x_2=-1$.

$$12x^3-13x^2-18x+7=12\cdot(-1)^3-13\cdot(-1)^2-18\cdot(-1)+7=-12-13+18+7=0$$

Hledáme rozklad pomocí dělení mnohočlenů:

$$\left(12x^3-13x^2-18x+7\right):(x+1)=12x^2-25x+7$$
$$-\left(12x^3+12x^2\right)$$
$$-25x^2-18x+7$$
$$-\left(-25x^2-25x\right)$$
$$7x+7$$
$$-(7x+7)$$
$$0$$

$$\left(12x^3-13x^2-18x+7=0\right)=(x+1)\left(12x^2-25x+7\right)$$

Určíme kořeny rovnice $12x^2-25x+7=0$:

$$x_{3,4}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{25\pm\sqrt{625-(4\cdot12\cdot7)}}{24}=\frac{25\pm\sqrt{289}}{24}=\frac{25\pm17}{24}$$

$$x_3=\frac{25+17}{24}=1\frac{3}{4} \qquad x_4=\frac{25-17}{24}=\frac{1}{3}$$

$$K=\left\{1;-1;1\frac{3}{4};\frac{1}{3}\right\}$$

Pedagogická poznámka: Závěr hodiny je určen pro žáky, kteří mají výpočty rovnic na kalkulačkách, ostatní řeší předchozí příklady.

Na závěr hodiny se ještě vrátíme k řešení rovnic na kalkulačkách.

Př. 6: Vyřeš na kalkulačce rovnici $x^3-9x^2+24x-20=0$. Zhodnoť výsledek.

Kalkulačka CASIO fx-570MS najde dva kořeny: 2 a 5.

Počet kořenů je překvapivý. U rovnice třetího řádu bychom očekávali tři kořeny (příklady, které jsme počítali) nebo jeden kořen (po vydělení získáme kvadratickou rovnici, která nemá řešení).
Zkusíme využít výsledek z kalkulátoru a vyřešit rovnici tak, jako v předchozích příkladech.
Protože kořenem je číslo 2, můžeme levou stranu rozložit (například dělením):

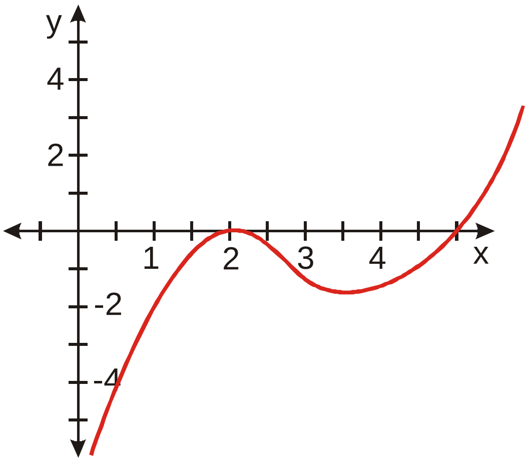
$$\begin{aligned}
&\left(x^3-9x^2+24x-20\right):\left(x-2\right)=x^2-7x+10\\
&-\left(x^3-2x^2\right)\\
&\qquad -7x^2+24x-20\\
&\quad -\left(-7x^2+14x\right)\\
&\qquad\qquad 10x-20\\
&\qquad\quad -\left(10x-20\right)\\
&\qquad\qquad\qquad 0
\end{aligned}$$

Získaný trojčlen můžeme rozložit z hlavy $\left(x^2-7x+10\right)=\left(x-2\right)\left(x-5\right)$.

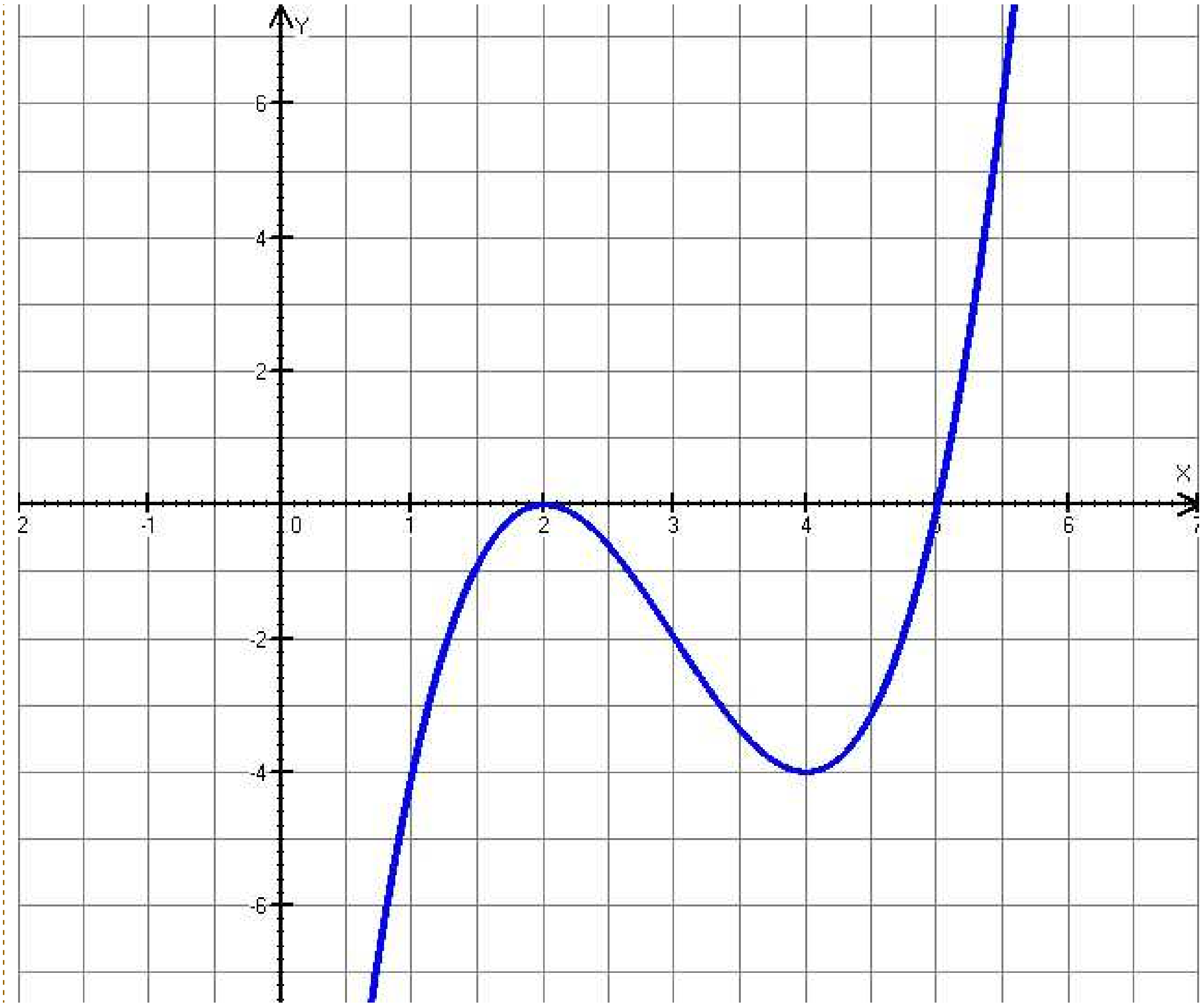
Celá rovnice: $\left(x^3-9x^2+24x-20\right)=\left(x-2\right)\left(x-2\right)\left(x-5\right) \Rightarrow$ číslo 2 je kořenem rovnice dvakrát (dvojnásobný kořen).

Př. 7: Načrtni graf funkce $x^3-9x^2+24x-20=0$. Využij výsledky předchozího příkladu.

Pro velká záporná čísla má funkce určitě záporné hodnoty. Prochází osou x v bodech $[2;0]$ a $[5;0]$. Pro velká kladná čísla se hodnoty blíží k nekonečnu. Osou y prochází v bodě $[0;-20]$
Pokud máme všechny podmínky splnit, musí se graf v bodě $[2;0]$ dotýkat osy x zespodu.



Odhad si můžeme ověřit grafem z počítače.



Dodatek: Souvislost mezi rovnicí a funkcí vede k jedné velice zajímavé otázce ohledně grafu kubíckých funkcí: Je možné, aby kubická funkce měla více než jednu vlnku?.

Shrnutí: Rovnice třetího nebo vyššího řádu už neřešíme pomocí vzorců.