2.7.10 Grafy funkcí s druhou odmocninou

Předpoklady: 020413, 020709

Pedagogická poznámka: V první části hodiny při kreslení grafů nesmí jít o nic nového, studenti musí chápat, že jde znovu o pouhé opakování dávno probraného.

Př. 1: Nakresli graf funkce $y = \sqrt{x+2} - 1$.

Jde o odvozeninu z funkce $y = \sqrt{x}$, přepíšeme pomocí $y = \sqrt{x} = f(x)$

$\Rightarrow y = \sqrt{x+2} - 1 = f(x+2) - 1$.

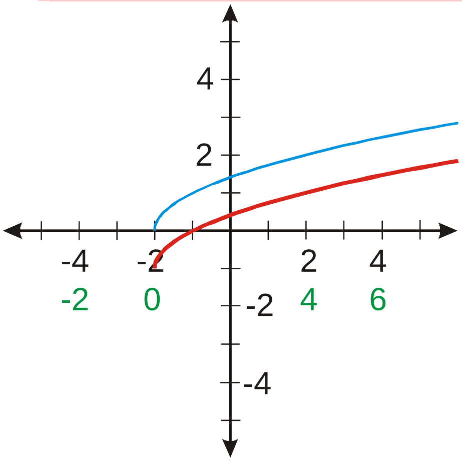
Stejný postup jako vždy předtím.

Zvolíme x.

Vypočteme $x+2$.

Nakreslíme funkci $y = f(x+2) = \sqrt{x+2}$.

Nakreslíme funkci $y = f(x+2) - 1 = \sqrt{x+2} - 1$.



Př. 2: Nakresli graf funkce $y = \left|\sqrt{x} - 2\right|$.

Přepíšeme pomocí $y = \sqrt{x} = f(x) \Rightarrow y = \left|\sqrt{x} - 2\right| = \left|f(x) - 2\right|$.

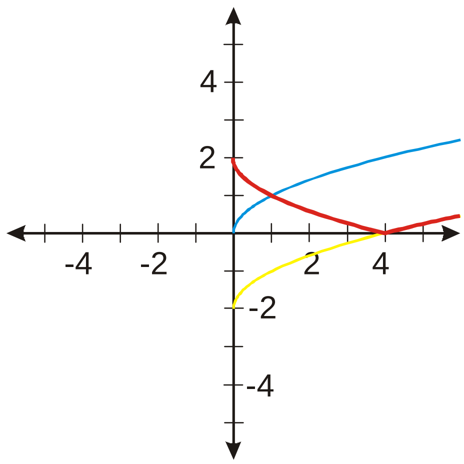
Stejný postup jako vždy předtím.

Zvolíme x.

Nakreslíme funkci $y = f(x) = \sqrt{x}$.

Nakreslíme funkci $y = f(x) - 2 = \sqrt{x} - 2$.

Nakreslíme funkci $y = \left|f(x) - 2\right| = \left|\sqrt{x} - 2\right|$.



Pedagogická poznámka: Funkce se láme poměrně daleko od počátku. Mnozí studenti proto graf v bodě $[4;0]$ ukončují. Stojí za to, je upozornit, někteří mají problémy s dokončením grafu.

Pedagogická poznámka: Následující dva příklady končí většinou velmi špatně. Důvod je jednoduchý, většině žáků se nechce přepisovat osu. Základní radou tedy je: „Udělej to pořádně“, což v naprosté většině případů stačí.

Př. 3: Nakresli graf funkce $y=\sqrt{|x|-1}$.

Přepíšeme pomocí $y=\sqrt{x}=f(x) \Rightarrow y=\sqrt{|x|-1}=f(|x|-1)$.

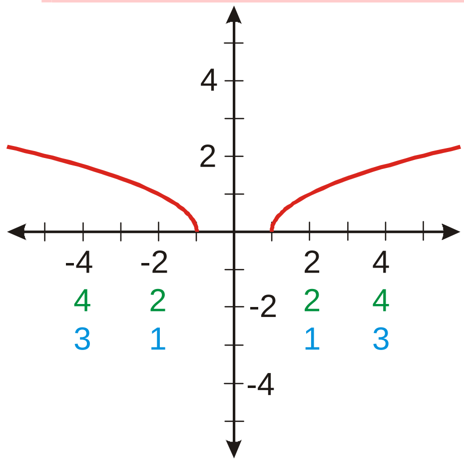
Stejný postup jako vždy předtím.

Zvolíme x.

Vypočteme $|x|$.

Vypočteme $|x|-1$.

Nakreslíme funkci $y=f(|x|-1)=\sqrt{|x|-1}$.



Př. 4: Nakresli graf funkce $y=\sqrt{3-|x|}$.

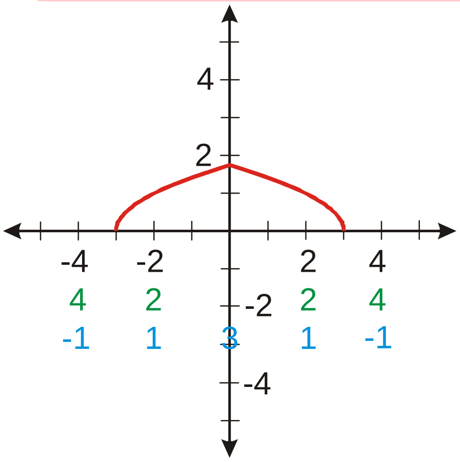
Přepíšeme pomocí $y=\sqrt{x}=f(x)\Rightarrow y=\sqrt{3-|x|}=f(3-|x|)$.
Stejný postup jako vždy předtím.

Zvolíme x.

Vypočteme $|x|$.

Vypočteme $3-|x|$.

Nakreslíme funkci $y=f(3-|x|)=\sqrt{3-|x|}$.



Př. 5: Nakresli graf funkce $y=2\sqrt{4-x}$.

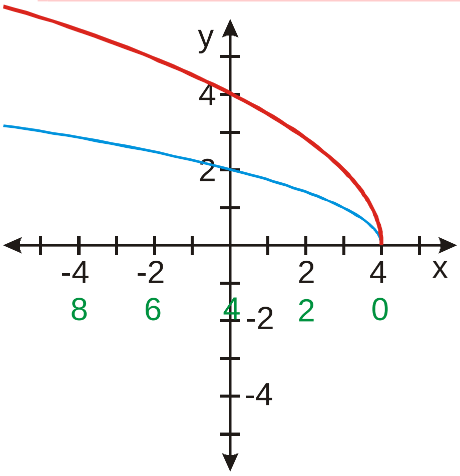
Přepíšeme pomocí $y=\sqrt{x}=f(x)\Rightarrow y=2\sqrt{4-x}=2f(4-x)$.
Stejný postup jako vždy předtím.

Zvolíme x.

Vypočteme $4-x$.

Nakreslíme funkci $y=f(4-x)=\sqrt{4-x}$.

Nakreslíme funkci $y=2\sqrt{4-x}=2f(4-x)$.



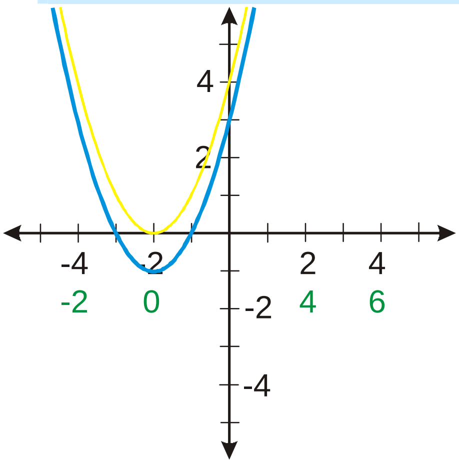
Pedagogická poznámka: Následující příklad studenti vyřeší samostatně pouze výjimečně. Používáme proto společnou práci s poradou u tabule a samostatným postupem v lavicích. Stačí na něj 15 minut.

Př. 6: Rozhodni zda funkce $y = x^2 + 4x + 3$ má funkci inverzní. Pokud ne, omez její definiční obor tak, aby funkce inverzní existovala. Najdi ji, nakresli do společného obrázku grafy obou funkcí. Urči jejich definiční obory a obory hodnot, porovnej je a zkontroluj, zda splňují podmínky pro inverzní funkce.

$y = x^2 + 4x + 3$ je funkce kvadratická, není prostá a nemá tedy inverzní funkci.
Nakreslíme graf funkce, abychom zjistili, jak musíme omezit definiční obor.
$y = x^2 + 4x + 3 = x^2 + 2\cdot x\cdot 2 + 2^2 - 2^2 + 3 = (x+2)^2 - 1$.

Nakreslíme graf , považujeme $y = x^2 = f(x) \Rightarrow y = (x+2)^2 - 1 = f(x+2) - 1$

Zvolíme x.
Vypočteme $x+2$.
Nakreslíme funkci $y = f(x+2) = (x+2)^2$.
Nakreslíme funkci $y = f(x+2) - 1 = (x+2)^2 - 1$.



Z obrázku je zřejmé, že pokud má být funkce prostá, musíme omezit definiční obor například na $D(f) = \langle -2;\infty)$.

Máme původní funkci $f(x)$: $y = (x+2)^2 - 1$, $D(f) = \langle -2;\infty)$, $H(f) = \langle -1;\infty)$.

Hledáme předpis inverzní funkce k funkci $y = x^2 + 4x + 3$.

Prohodíme *x* a *y*: $x = y^2 + 4y + 3$ - to není příliš veselý výsledek, v předpisu je dvakrát *y* v různých mocninách $\Rightarrow$ těžko to upravíme na vztah $y =$.

Příčina problémů: $y = x^2 + 4x + 3$ - v původním předpisu je dvakrát *x*, ale tento problém už řešit umíme doplněním na čtverec $\Rightarrow$ začneme u tvaru $y = (x+2)^2 - 1$.

Prohodíme *x* a *y*: $x = (y+2)^2 - 1$.

$x = (y+2)^2 - 1$

$x + 1 = (y+2)^2$

$\sqrt{x+1} = y + 2$

$y = \sqrt{x+1} - 2$

Inverzní funkce: $f^{-1}(x)$: $y = \sqrt{x+1} - 2$, $D\left(f^{-1}\right) = \langle -1; \infty)$, $H\left(f^{-1}\right) = \langle -2; \infty)$.

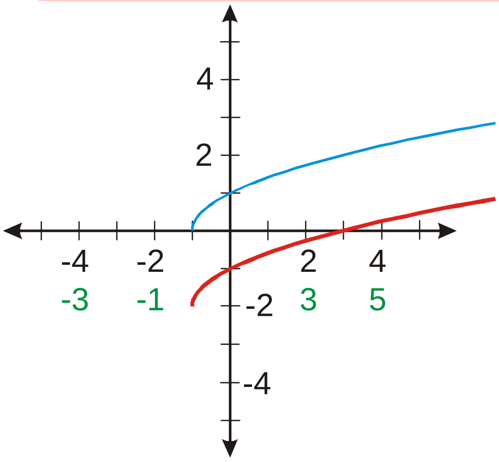
Nakreslíme graf , považujeme $y = \sqrt{x} = f(x) \Rightarrow y = \sqrt{x+1} - 2 = f(x+1) - 2$.

Zvolíme x.

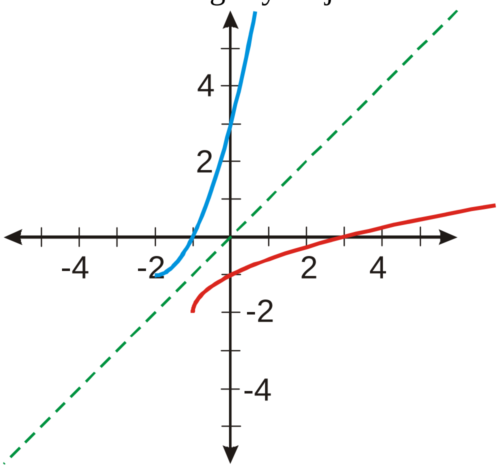
Vypočteme $x+1$.

Nakreslíme funkci $y = f(x+1) = \sqrt{x+1}$.

Nakreslíme funkci $y = f(x+1) - 2 = \sqrt{x+1} - 2$.



Nakreslíme oba grafy do jednoho obrázku:



Je vidět, že grafy jsou souměrné podle přímky $y = x$.

Zkontrolujeme definiční obory a obory hodnot:

Původní funkce: $f(x)$: $y = (x+2)^2 - 1$, $D(f) = \langle -2; \infty)$, $H(f) = \langle -1; \infty)$.

Inverzní funkce: $f^{-1}(x)$: $y = \sqrt{x+1} - 2$, $D\left(f^{-1}\right) = \langle -1; \infty)$, $H\left(f^{-1}\right) = \langle -2; \infty)$.

Platí: $D(f) = H\left(f^{-1}\right)$ i $H(f) = D\left(f^{-1}\right)$.

Pedagogická poznámka: Při společné kontrole nechávám při hledání předpisu inverzní funkce studentům chvíli čas, aby poté co odhalíme problém se dvěma *y*, měli chvíli čas na přemýšlení o jeho odstranění.

Př. 7: Petáková:
strana 59/cvičení 16 f_7, f_8

strana 59/cvičení 17 g_3, g_7

strana 59/cvičení 18 h_2, h_4

Shrnutí: S grafy funkce $y = \sqrt{x}$ zacházíme opět stejně jako s grafy ostatních funkcí.