2.7.11 Počítání s odmocninami I

Předpoklady: 2710

Pedagogická poznámka: Rychlost postupu v následujících dvou hodinách hodně závisí na tom, kolik si studenti pamatují z prvního ročníku. Může se stát, že se obě hodiny roztáhnout do tří.

Už jsme měli vzorce pro počítání s druhou odmocninou. Teď je zopakujeme a rozšíříme na *n*-tou odmocninu.

Pro všechna nezáporná reálná čísla *a,b* **a pro každé přirozené číslo** *n* **platí:**
$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

Důkaz:
$\sqrt[n]{a} = s \Rightarrow a = s^n$, $\sqrt[n]{b} = t \Rightarrow b = t^n$
Dosadíme: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{s^n t^n} = \sqrt[n]{(st)^n} = st = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \Rightarrow \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ (to jsme chtěli).

Předchozí pravidlo můžeme to rozšířit pro více čísel.

Př. 1: Dokonči následující větu tak, aby byla rozšířením pravidla $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ pro více čísel: „Pro všechna přirozená čísla ***n, r*** a pro všechna nezáporná reálná čísla $a_1, a_2 ... a_r$ platí:“

Proměnná *n* udává stupeň odmocniny, proměnná *r* počet čísel, které pod odmocninou násobíme. $\Rightarrow$
Pro všechna přirozená čísla ***n, r*** a pro všechna nezáporná reálná čísla $a_1, a_2 ... a_r$ platí:
$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_r} = \sqrt[n]{a_1} \cdot \sqrt[n]{a_2} \cdot ... \cdot \sqrt[n]{a_r}$.

Pro všechna přirozená čísla *n*, *r* **a pro všechna nezáporná reálná čísla** $a_1, a_2 ... a_r$ **platí:** $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_r} = \sqrt[n]{a_1} \cdot \sqrt[n]{a_2} \cdot ... \cdot \sqrt[n]{a_r}$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je trošku netradiční, ale velmi potřebný, když chceme, aby studenti vůbec vnímali smysl vět podobného typu. Problém je s písmeny *n* a *r*, někteří žáci píší například $\sqrt[n \cdot r]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_r} = \sqrt[n]{a_1} \cdot \sqrt[n]{a_2} \cdot ... \cdot \sqrt[n]{a_r}$ nebo $\sqrt[n \cdot r]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_r} = \sqrt[n \cdot r]{a_1} \cdot \sqrt[n \cdot r]{a_2} \cdot ... \cdot \sqrt[n \cdot r]{a_r}$. Nejdříve si tedy vyjasníme, co představují. Také se ptám, jak by začátek věty musela vypadat, aby se tato písmena ve vzorci prohodila („Pro všechna přirozená čísla ***n, r*** a pro všechna nezáporná reálná čísla $a_1, a_2 ... a_n$ platí:“).

Podobný vztah existuje i pro dělení.

Pro všechna nezáporná reálná čísla a, všechna kladná reálná čísla b a pro každé přirozené číslo n platí:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Př. 2: Zjednoduš pomocí předchozího pravidla následující výrazy.

a) $\sqrt[3]{16}$ b) $\sqrt{14}\cdot\sqrt{21}\cdot\sqrt{6}$ c) $\sqrt[4]{64}$ d) $\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{24}$

a) $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt{14}\cdot\sqrt{21}\cdot\sqrt{6} = \sqrt{2\cdot 7}\cdot\sqrt{7\cdot 3}\cdot\sqrt{2\cdot 3} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} =$
$\left(\sqrt{7}\right)^2\left(\sqrt{3}\right)^2\left(\sqrt{2}\right)^2 = 3\cdot 2\cdot 7 = 42$

c) $\sqrt[4]{64} = \sqrt[4]{16\cdot 4} = \sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[4]{4} = 2\cdot\sqrt[4]{4}$ (výraz jde upravovat dál, uvidíme později)

d) $\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{3\cdot 3}\cdot\sqrt[3]{3\cdot 8} = \sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{8} = 3\cdot 2 = 6$

Př. 3: Zjednoduš pomocí předchozího pravidla následující výrazy.

a) $\sqrt{\frac{4}{25}}$ b) $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{32}}$ c) $\sqrt{\frac{14}{9}}\cdot\sqrt{\frac{8}{7}}$

a) $\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}$

b) $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{32}} = \sqrt[3]{\frac{4}{32}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$

c) $\sqrt{\frac{14}{9}}\cdot\sqrt{\frac{8}{7}} = \sqrt{\frac{14\cdot 8}{9\cdot 7}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$

Př. 4: Částečně odmocni.

a) $\sqrt{24}$ b) $\sqrt{12}$ c) $\sqrt{18}$ d) $\sqrt{50}$
e) $\sqrt[3]{24}$ f) $\sqrt[4]{48}$ g) $2\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{54} + 4\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{4}$

a) $\sqrt{24} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{6} = 2\sqrt{6}$

b) $\sqrt{12} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

c) $\sqrt{18} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

d) $\sqrt{50} = \sqrt{25}\cdot\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

e) $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3}$

f) $\sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[4]{6} = \sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{3} = 2\sqrt[4]{3}$

g) $2\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{54} + 4\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{4} = 2\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{6} + 4\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2} + 8\sqrt[3]{2} = 9\sqrt[3]{2}$

Př. 5: Zjednoduš.

a) $\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)-\sqrt{3}\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$ b) $\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)$

c) $\sqrt[3]{12}\left(\sqrt[3]{18}-\sqrt[3]{4}\right)-\sqrt[3]{4}\left(\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{2}\right)$

a)
$\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)-\sqrt{3}\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right) = \sqrt{2}\sqrt{3}-\sqrt{2}\sqrt{2}-\sqrt{3}\sqrt{2}+\sqrt{3}\sqrt{3} = \sqrt{2}\sqrt{3}-2-\sqrt{3}\sqrt{2}+3 = 1$

b)

$$\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)=$$
$$=\sqrt{2}\sqrt{2}+\sqrt{2}\sqrt{3}-\sqrt{2}\sqrt{6}-\sqrt{3}\sqrt{2}-\sqrt{3}\sqrt{3}+\sqrt{3}\sqrt{6}+\sqrt{6}\sqrt{2}+\sqrt{6}\sqrt{3}-\sqrt{6}\sqrt{6}=$$
$$2+\sqrt{6}-2\sqrt{3}-\sqrt{6}-3+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-6=-7+6\sqrt{2}$$

c)

$$\sqrt[3]{12}\left(\sqrt[3]{18}-\sqrt[3]{4}\right)-\sqrt[3]{4}\left(\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{2}\right)=\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt[3]{18}-\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{2}=$$
$$=\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{2}=2\cdot 3-2\sqrt[3]{6}-2\sqrt[3]{3}-2=$$
$$4-2\sqrt[3]{6}-2\sqrt[3]{3}=2\left(2-\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{3}\right)$$

Př. 6: Dokaž větu o vzorci $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

Důkaz:

$\sqrt[n]{a}=s\Rightarrow a=s^n$, $\sqrt[n]{b}=t\Rightarrow b=t^n$

Dosadíme: $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{s^n}{t^n}}=\sqrt[n]{\left(\dfrac{s}{t}\right)^n}=\dfrac{s}{t}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\Rightarrow\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ (to jsme chtěli).

Pro každé celé číslo s, každé kladné reálné číslo a a každé přirozené číslo n platí: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^s=\sqrt[n]{a^s}$

Př. 7: Porovnej věty pro vzorce $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $\left(\sqrt[n]{a}\right)^s=\sqrt[n]{a^s}$ a vysvětli rozdíly v podmínkách, které jsou kladeny na hodnotu čísla *a*.

- Vzorec $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$: všechna nezáporná čísla *a*.
- Vzorec $\left(\sqrt[n]{a}\right)^s=\sqrt[n]{a^s}$: všechna kladná čísla *a*.

$\Rightarrow$ Vzorec $\left(\sqrt[n]{a}\right)^s=\sqrt[n]{a^s}$ zakazuje nulovou hodnotu *a*. Proč?

V předpokladu věty uvažujeme *s* jako celé číslo $\Rightarrow$ *s* může být záporné $\Rightarrow$ *a* se nesmí rovnat nule, protože záporné mocniny je možné utvořit pouze pro nenulové hodnoty (zlomek $a^{-2}=\dfrac{1}{a^2}$ by měl ve jmenovateli nulu).

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad není ani pro nejchytřejší studenty jednoduchý, proto nemá cenu příliš zdržovat (dobře se na něm vyrovnává postup celé třídy). Přesto by byla škoda ho vynechávat, je velmi dobrou ukázkou toho, že přesnost nemusí spočívat v přesném citování učebnic, ale naopak v dobré znalosti toho, o čem mluvíte.

Př. 8: Zjednoduš pomocí předchozího pravidla následující výrazy:

a) $\left(\sqrt[4]{2}\right)^6$ b) $\left(\sqrt[3]{4}\right)^2$ c) $\sqrt[5]{2^3}\cdot\sqrt[5]{2^2}$

a) $\left(\sqrt[4]{2}\right)^6=\sqrt[4]{2^6}=\sqrt[4]{2^4\cdot 2^2}=\sqrt[4]{2^4}\cdot\sqrt[4]{2^2}=2\sqrt[4]{4}$

b) $\left(\sqrt[3]{4}\right)^2=\sqrt[3]{4^2}=\sqrt[3]{2^4}=\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{2}=2\sqrt[3]{2}$

c) $\sqrt[5]{2^3}\cdot\sqrt[5]{2^2}=\left(\sqrt[5]{2}\right)^3\cdot\left(\sqrt[5]{2}\right)^2=\left(\sqrt[5]{2}\right)^5=2$

A nakonec si ještě zopakujeme usměrňování zlomků.

Př. 9: Usměrni zlomky:

a) $\frac{3}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ c) $\frac{2}{\sqrt[3]{12}}$ d) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ e) $\frac{1}{1-\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

a) $\frac{3}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$ b) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$

c) $\frac{2}{\sqrt[3]{12}}=\frac{2}{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{3}}\cdot\frac{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{9}}=\frac{2\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{9}}{2\cdot 3}=\frac{\sqrt[3]{18}}{3}$

d) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{3-2\sqrt{6}+2}{3-2}=5-2\sqrt{6}$

$$\frac{1}{1-\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{1}{\left(1-\sqrt{3}\right)+\sqrt{5}}\cdot\frac{\left(1-\sqrt{3}\right)-\sqrt{5}}{\left(1-\sqrt{3}\right)-\sqrt{5}}=\frac{1-\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\left(1-\sqrt{3}\right)^2-5}=\frac{1-\sqrt{3}-\sqrt{5}}{1-2\sqrt{3}+3-5}=$$

e) $=\frac{1-\sqrt{3}-\sqrt{5}}{-2\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}+1}\cdot\frac{2\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}-1}=\frac{2\sqrt{3}\sqrt{3}+2\sqrt{3}\sqrt{5}-2\sqrt{3}-\sqrt{3}-\sqrt{5}+1}{4\cdot 3-1}=$

$=\frac{7+2\sqrt{15}-3\sqrt{3}-\sqrt{5}}{11}$

Př. 10: Petáková:

strana 59/cvičení 19 c) e) i)
strana 59/cvičení 21 c)
strana 59/cvičení 22 d)
strana 59/cvičení 23 d)
strana 59/cvičení 24 a)strana 60/cvičení 26 d) i) k)
strana 60/cvičení 27 b)

Shrnutí: Odmocninu můžeme "roztrhnout" jen přes násobení nebo dělení.