

2.7.12 Počítání s odmocninami I

Předpoklady: 020711

Pedagogická poznámka: Počítání s odmocninami původně představovalo pouze dvě hodiny, ale neustále se opakovaly problémy se stíháním proto byly původní hodiny rozděleny na tři a trochu doplněny dalšími příklady.

V prvním ročníku jsme měli vzorce pro počítání s druhou odmocninou. Teď je zopakujeme a rozšíříme na n -tou odmocninu.

Pro všechna nezáporná reálná čísla a, b a pro každé přirozené číslo n platí:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Důkaz:

$$\sqrt[n]{a} = s \Rightarrow a = s^n, \quad \sqrt[n]{b} = t \Rightarrow b = t^n$$

Dosadíme: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{s^n t^n} = \sqrt[n]{(st)^n} = st = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \Rightarrow \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ (to jsme chtěli).

Předchozí pravidlo můžeme to rozšířit pro více čísel.

Př. 1: Dokonči následující větu tak, aby byla rozšířením pravidla $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ pro více čísel: „Pro všechna přirozená čísla n, r a pro všechna nezáporná reálná čísla a_1, a_2, \dots, a_r platí:“

Proměnná n udává stupeň odmocniny, proměnná r počet čísel, které pod odmocninou násobíme. \Rightarrow

Pro všechna přirozená čísla n, r a pro všechna nezáporná reálná čísla a_1, a_2, \dots, a_r platí:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_r} = \sqrt[n]{a_1} \cdot \sqrt[n]{a_2} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{a_r}.$$

Pro všechna přirozená čísla n, r a pro všechna nezáporná reálná čísla

$$a_1, a_2, \dots, a_r \text{ platí: } \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_r} = \sqrt[n]{a_1} \cdot \sqrt[n]{a_2} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{a_r}$$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je trošku netradiční, ale velmi potřebný, když chceme, aby studenti vůbec vnímali smysl vět podobného typu. Problém je s písmeny n a r , někteří žáci píšou například $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_r} = \sqrt[n]{a_1} \cdot \sqrt[n]{a_2} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{a_r}$ nebo $\sqrt[nr]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_r} = \sqrt[nr]{a_1} \cdot \sqrt[nr]{a_2} \cdot \dots \cdot \sqrt[nr]{a_r}$. Nejdříve si tedy vyjasníme, co představují. Také se ptám, jak by začátek věty musela vypadat, aby se tato písmena ve vzorci prohodila („Pro všechna přirozená čísla n, r a pro všechna nezáporná reálná čísla a_1, a_2, \dots, a_n platí:“).

Podobný vztah existuje i pro dělení.

Pro všechna nezáporná reálná čísla a , všechna kladná reálná čísla b a pro každé přirozené číslo n platí:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Př. 2: Zjednoduš pomocí předchozího pravidla následující výrazy.

a) $\sqrt[3]{16}$ b) $\sqrt{14} \cdot \sqrt{21} \cdot \sqrt{6}$ c) $\sqrt[4]{64}$ d) $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{24}$

a) $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$

$\sqrt{14} \cdot \sqrt{21} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{2 \cdot 7} \cdot \sqrt{7 \cdot 3} \cdot \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} =$

b) $(\sqrt{7})^2 (\sqrt{3})^2 (\sqrt{2})^2 = 3 \cdot 2 \cdot 7 = 42$

c) $\sqrt[4]{64} = \sqrt[4]{16 \cdot 4} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{4} = 2 \cdot \sqrt[4]{4}$ (výraz jde upravovat dál, uvidíme později)

d) $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{3 \cdot 3} \cdot \sqrt[3]{3 \cdot 8} = \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{8} = 3 \cdot 2 = 6$

Př. 3: Zjednoduš pomocí předchozího pravidla následující výrazy.

a) $\sqrt{\frac{4}{25}}$ b) $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{32}}$ c) $\sqrt{\frac{14}{9}} \cdot \sqrt{\frac{8}{7}}$

a) $\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}$

b) $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{32}} = \sqrt[3]{\frac{4}{32}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$

c) $\sqrt{\frac{14}{9}} \cdot \sqrt{\frac{8}{7}} = \sqrt{\frac{14 \cdot 8}{9 \cdot 7}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$

Př. 4: Částečně odmocni.

a) $\sqrt{24}$ b) $\sqrt{12}$ c) $\sqrt{18}$ d) $\sqrt{50}$
e) $\sqrt[3]{24}$ f) $\sqrt[4]{48}$ g) $2\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{54} + 4\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{4}$

a) $\sqrt{24} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$

b) $\sqrt{12} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

c) $\sqrt{18} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

d) $\sqrt{50} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

e) $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3}$

f) $\sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[4]{6} = \sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{3} = 2\sqrt[4]{3}$

g) $2\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{54} + 4\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{4} = 2\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{6} + 4\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2} + 8\sqrt[3]{2} = 9\sqrt[3]{2}$

Př. 5: Zjednoduš.

a) $\sqrt{2}(\sqrt{3} - \sqrt{2}) - \sqrt{3}(\sqrt{2} - \sqrt{3})$ b) $(\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{6})(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6})$

c) $\sqrt[3]{12}(\sqrt[3]{18} - \sqrt[3]{4}) - \sqrt[3]{4}(\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{2})$

a)

$\sqrt{2}(\sqrt{3} - \sqrt{2}) - \sqrt{3}(\sqrt{2} - \sqrt{3}) = \sqrt{2}\sqrt{3} - \sqrt{2}\sqrt{2} - \sqrt{3}\sqrt{2} + \sqrt{3}\sqrt{3} = \sqrt{2}\sqrt{3} - 2 - \sqrt{3}\sqrt{2} + 3 = 1$

b)

$$\begin{aligned}
& (\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{6})(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6}) = \\
& = \sqrt{2}\sqrt{2} + \sqrt{2}\sqrt{3} - \sqrt{2}\sqrt{6} - \sqrt{3}\sqrt{2} - \sqrt{3}\sqrt{3} + \sqrt{3}\sqrt{6} + \sqrt{6}\sqrt{2} + \sqrt{6}\sqrt{3} - \sqrt{6}\sqrt{6} = \\
& 2 + \sqrt{6} - 2\sqrt{3} - \sqrt{6} - 3 + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - 6 = -7 + 6\sqrt{2}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
& \sqrt[3]{12}(\sqrt[3]{18} - \sqrt[3]{4}) - \sqrt[3]{4}(\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{18} - \sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2} = \\
& = \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2} = 2 \cdot 3 - 2\sqrt[3]{6} - 2\sqrt[3]{3} - 2 = \\
& 4 - 2\sqrt[3]{6} - 2\sqrt[3]{3} = 2(2 - \sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{3})
\end{aligned}$$

Př. 6: Dokaž větu o vzorci $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

Důkaz:

$$\sqrt[n]{a} = s \Rightarrow a = s^n, \quad \sqrt[n]{b} = t \Rightarrow b = t^n$$

$$\text{Dosadíme: } \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{\frac{s^n}{t^n}} = \sqrt[n]{\left(\frac{s}{t}\right)^n} = \frac{s}{t} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \text{ (to jsme chtěli).}$$

Př. 7: Petáková:

strana 59/cvičení 19 c) e) i)

strana 59/cvičení 20 b) c) f)

strana 60/cvičení 21 a) c)

strana 60/cvičení 22 d)

strana 60/cvičení 23 d)

strana 60/cvičení 24 a)

Shrnutí: Odmocninu můžeme "roztrhnout" jen přes násobení nebo dělení.