2.7.13 Počítání s odmocninami II

Předpoklady: 020712

Pro každé celé číslo s, každé kladné reálné číslo a a každé přirozené číslo n platí: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^s = \sqrt[n]{a^s}$

Př. 1: Porovnej věty pro vzorce $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $\left(\sqrt[n]{a}\right)^s = \sqrt[n]{a^s}$ a vysvětli rozdíly v podmínkách, které jsou kladeny na hodnotu čísla a.

- Vzorec $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$: všechna nezáporná čísla a.
- Vzorec $\left(\sqrt[n]{a}\right)^s = \sqrt[n]{a^s}$: všechna kladná čísla a.

$\Rightarrow$ Vzorec $\left(\sqrt[n]{a}\right)^s = \sqrt[n]{a^s}$ zakazuje nulovou hodnotu a. Proč?
V předpokladu věty uvažujeme s jako celé číslo $\Rightarrow$ s může být záporné $\Rightarrow$ a se nesmí rovnat nule, protože záporné mocniny je možné utvořit pouze pro nenulové hodnoty (zlomek $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ by měl ve jmenovateli nulu).

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad není ani pro nejchytřejší studenty jednoduchý, proto nemá cenu příliš zdržovat. Přesto by byla škoda ho vynechávat, je velmi dobrou ukázkou toho, že přesnost nemusí spočívat v přesném citování učebnic, ale naopak v dobré znalosti toho, o čem mluvíte.

Př. 2: Zjednoduš pomocí předchozího pravidla následující výrazy:
a) $\left(\sqrt[4]{2}\right)^6$ b) $\left(\sqrt[3]{4}\right)^2$ c) $\sqrt[5]{2^3} \cdot \sqrt[5]{2^2}$

a) $\left(\sqrt[4]{2}\right)^6 = \sqrt[4]{2^6} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 2^2} = \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{2^2} = 2\sqrt[4]{4}$

b) $\left(\sqrt[3]{4}\right)^2 = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$

c) $\sqrt[5]{2^3} \cdot \sqrt[5]{2^2} = \left(\sqrt[5]{2}\right)^3 \cdot \left(\sqrt[5]{2}\right)^2 = \left(\sqrt[5]{2}\right)^5 = 2$

Př. 3: Sestav začátek věty o odmocninách, která končí vztahem: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$.

Čísla m a n jsou jako exponenty odmocniny – musí být přirozená.
Číslo a je základem odmocniny – musí být nezáporné.

Pro všechna přirozená čísla m, n a pro každé reálné nezáporné číslo a platí:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}$$

Př. 4: Zjednoduš pomocí předchozího pravidla výrazy:
a) $\sqrt{\sqrt[3]{2^6}}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt{8}}$ c) $\sqrt[6]{27}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3^3}}$

a) $\sqrt{\sqrt[3]{2^6}} = \sqrt[2\cdot 3]{2^6} = \sqrt[6]{2^6} = 2$ b) $\sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{\sqrt[3]{2^3}} = \sqrt{2}$
c) $\sqrt[6]{27}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3^3}} = \sqrt[6]{3^3}\cdot\sqrt[3\cdot 2]{3^3} = \sqrt[6]{3^3\cdot 3^3} = \sqrt[6]{3^6} = 3$

Př. 5: Částečně odmocni výraz $\sqrt[6]{a^{15}}$.

$\sqrt[6]{a^{15}} = \sqrt[6]{a^6}\cdot\sqrt[6]{a^6}\cdot\sqrt[6]{a^3} = a\cdot a\cdot\sqrt[2\cdot 3]{a^3} = a^2\cdot\sqrt{\sqrt[3]{a^3}} = a^2\sqrt{a}$

Předchozí výpočet je možné urychlit pomocí další (a pro odmocniny poslední) věty:

Pro všechna přirozená čísla m, n, p **a pro každé nezáporné číslo** a **platí:**
$$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Př. 6: Částečně odmocni výraz $\sqrt[6]{a^{15}}$.

$\sqrt[6]{a^{15}} = \sqrt[2\cdot 3]{a^{3\cdot 5}} = \sqrt{a^5} = \sqrt{a^2}\cdot\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{a} = a^2\sqrt{a}$

Př. 7: Zjednoduš pomocí předchozího pravidla následující výrazy:
a) $\sqrt[12]{2^{18}}$ b) $\sqrt[4]{4}$ c) $\sqrt[3]{a\sqrt{a^{10}}}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^2}\cdot\sqrt[6]{a^3}\cdot\sqrt[10]{a^5}}$

a) $\sqrt[12]{2^{18}} = \sqrt[2\cdot 6]{2^{3\cdot 6}} = \sqrt[2]{2^3} = 2\sqrt{2}$ b) $\sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2} = \sqrt[2\cdot 2]{2^2} = \sqrt[2]{2} = \sqrt{2}$
c) $\sqrt[3]{a\sqrt{a^{10}}} = \sqrt[3]{aa^5} = \sqrt[3]{a^6} = a^2$
d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^2}\cdot\sqrt[6]{a^3}\cdot\sqrt[10]{a^5}} = \sqrt[3]{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}} = \sqrt[3]{\sqrt{a^3}} = \sqrt{\sqrt[3]{a^3}} = \sqrt{a}$

Poslední vztah nepoužíváme pouze pro zjednodušování odmocnin, ale někdy i obráceně.
Zkusíme napsat výraz $\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3}$ jednou odmocninou. $\Rightarrow$ **Problém:** vzorec $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$ můžeme požít pouze v případě, že jde o stejný typ odmocniny, zatím máme každou odmocninu jinou.
Vzorec $\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$ nám umožní změnit:

- $\sqrt[3]{a^2}$ na odmocninu šestou, devátou, dvanáctou, patnáctou…
- $\sqrt[4]{a^3}$ na odmocninu osmou, dvanáctou, šestnáctou …

$\Rightarrow$ Obě odmocniny převedeme na dvanácté (připomíná to převádění na společný jmenovatel při sčítání zlomků): $\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3} = \sqrt[3\cdot 4]{a^{2\cdot 4}}\cdot\sqrt[4\cdot 3]{a^{3\cdot 3}} = \sqrt[12]{a^8\cdot a^9} = \sqrt[12]{a^{8+9}} = \sqrt[12]{a^{17}} = a\cdot\sqrt[12]{a^5}$.

Př. 8: Vyjádři součin pomocí jediné odmocniny:

a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{9}$ b) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[5]{9}$ c) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[6]{a^5}$

a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{9}=\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3^2}=\sqrt[2\cdot 3]{3^3}\cdot\sqrt[3\cdot 2]{3^{2\cdot 2}}=\sqrt[6]{3^3\cdot 3^4}=\sqrt[6]{3^7}=3\cdot\sqrt[6]{3}$

b) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[5]{9}=\sqrt[20]{3^{10}}\cdot\sqrt[20]{3^5}\cdot\sqrt[20]{3^8}=\sqrt[20]{3^{10+5+8}}=\sqrt[20]{3^{23}}=3\cdot\sqrt[20]{3^3}$

c) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[6]{a^5}=\sqrt[2\cdot 3]{a^3}\cdot\sqrt[3\cdot 2]{a^{2\cdot 2}}\cdot\sqrt[6]{a^5}=\sqrt[6]{a^3}\cdot\sqrt[6]{a^4}\cdot\sqrt[6]{a^5}=\sqrt[6]{a^{3+4+5}}=\sqrt[6]{a^{12}}=\sqrt[6]{a^{2\cdot 6}}=a^2$

Pedagogická poznámka: Někteří studenti mají s předchozím příkladem problémy. V některých případech pomáhá, když studentům ještě jednou připomenete, že chování mocnin a odmocnin připomíná sčítání zlomků.

Př. 9: Zjednoduš.

a) $\sqrt{3\sqrt{3}}$ b) $\sqrt{\frac{1}{3}\sqrt[3]{9}}$ c) $\sqrt[4]{8\sqrt[3]{4\sqrt{2}}}$

a) $\sqrt{3\sqrt{3}}=\sqrt{\sqrt{3^2}\sqrt{3}}=\sqrt{\sqrt{3^3}}=\sqrt[4]{3^3}$

b) $\sqrt{\frac{1}{3}\sqrt[3]{81}}=\sqrt{\sqrt[3]{\frac{1}{3^3}}\sqrt[3]{9^2}}=\sqrt{\sqrt[3]{\frac{3^4}{3^3}}}=\sqrt{\sqrt[3]{3}}=\sqrt[6]{3}$

c) $\sqrt[4]{8\sqrt[3]{4\sqrt{2}}}=\sqrt[4]{2^3\sqrt[3]{2^2\sqrt{2}}}=\sqrt[4]{2^3\sqrt[3]{\sqrt{2^4}\sqrt{2}}}=\sqrt[4]{2^3\sqrt[3]{\sqrt{2^5}}}=\sqrt[4]{\sqrt[6]{2^{18}}\sqrt[6]{2^5}}=\sqrt[4]{\sqrt[6]{2^{23}}}=\sqrt[24]{2^{23}}$

Př. 10: Petáková:
strana 63/cvičení 53 b) e)
strana 64/cvičení 54 b) f)

Shrnutí: Odmocnina s odmocniny se „násobí“ jako mocnina z mocniny.