

## 2.7.13 Počítání s odmocninami II

**Předpoklady:** 020712

**Pro každé celé číslo  $s$ , každé kladné reálné číslo  $a$  a každé přirozené číslo  $n$**

$$\text{platí: } (\sqrt[n]{a})^s = \sqrt[n]{a^s}$$

**Př. 1:** Porovnej věty pro vzorce  $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ ,  $(\sqrt[n]{a})^s = \sqrt[n]{a^s}$  a vysvětli rozdíly v podmínkách, které jsou kladeny na hodnotu čísla  $a$ .

- Vzorec  $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ : všechna nezáporná čísla  $a$ .
- Vzorec  $(\sqrt[n]{a})^s = \sqrt[n]{a^s}$ : všechna kladná čísla  $a$ .

$\Rightarrow$  Vzorec  $(\sqrt[n]{a})^s = \sqrt[n]{a^s}$  zakazuje nulovou hodnotu  $a$ . Proč?

V předpokladu věty uvažujeme  $s$  jako celé číslo  $\Rightarrow s$  může být záporné  $\Rightarrow a$  se nesmí rovnat nule, protože záporné mocniny je možné utvořit pouze pro nenulové hodnoty (zlomek

$a^{-2} = \frac{1}{a^2}$  by měl ve jmenovateli nulu).

**Pedagogická poznámka:** Předchozí příklad není ani pro nejchytřejší studenty jednoduchý, proto nemá cenu příliš zdržovat. Přesto by byla škoda ho vynechávat, je velmi dobrou ukázkou toho, že přesnost nemusí spočívat v přesném citování učebnic, ale naopak v dobré znalosti toho, o čem mluvíte.

**Př. 2:** Zjednoduš pomocí předchozího pravidla následující výrazy:

a)  $(\sqrt[4]{2})^6$       b)  $(\sqrt[3]{4})^2$       c)  $\sqrt[5]{2^3} \cdot \sqrt[5]{2^2}$

a)  $(\sqrt[4]{2})^6 = \sqrt[4]{2^6} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 2^2} = \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{2^2} = 2\sqrt[4]{2}$

b)  $(\sqrt[3]{4})^2 = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} = 2\sqrt[3]{2}$

c)  $\sqrt[5]{2^3} \cdot \sqrt[5]{2^2} = (\sqrt[5]{2})^3 \cdot (\sqrt[5]{2})^2 = (\sqrt[5]{2})^5 = 2$

**Př. 3:** Sestav začátek věty o odmocninách, která končí vztahem:  $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$ .

Čísla  $m$  a  $n$  jsou jako exponenty odmocniny – musí být přirozená.

Číslo  $a$  je základem odmocniny – musí být nezáporné.

**Pro všechna přirozená čísla  $m, n$  a pro každé reálné nezáporné číslo  $a$  platí:**

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

**Př. 4:** Zjednoduš pomocí předchozího pravidla výrazy:

a)  $\sqrt{\sqrt[3]{2^6}}$

b)  $\sqrt[3]{\sqrt{8}}$

c)  $\sqrt[6]{27} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3^3}}$

a)  $\sqrt{\sqrt[3]{2^6}} = \sqrt[2 \cdot 3]{2^6} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

b)  $\sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^3}} = \sqrt{2}$

c)  $\sqrt[6]{27} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3^3}} = \sqrt[6]{3^3} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3^3}} = \sqrt[6]{3^3} \cdot \sqrt[3]{3^{3/2}} = \sqrt[6]{3^3} \cdot 3^{1/2} = \sqrt[6]{3^3} \cdot \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{3^6} = 3$

**Př. 5:** Částečně odmocni výraz  $\sqrt[6]{a^{15}}$ .

$$\sqrt[6]{a^{15}} = \sqrt[6]{a^6} \cdot \sqrt[6]{a^6} \cdot \sqrt[6]{a^3} = a \cdot a \cdot \sqrt[2 \cdot 3]{a^3} = a^2 \cdot \sqrt{\sqrt[3]{a^3}} = a^2 \sqrt{a}$$

Předchozí výpočet je možné urychlit pomocí další (a pro odmocniny poslední) věty:

**Pro všechna přirozená čísla  $m, n, p$  a pro každé nezáporné číslo  $a$  platí:**

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^{mp}}} = \sqrt[n]{a^m}$$

**Př. 6:** Částečně odmocni výraz  $\sqrt[6]{a^{15}}$ .

$$\sqrt[6]{a^{15}} = \sqrt[2 \cdot 3]{a^{3 \cdot 5}} = \sqrt{a^5} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{a} = a^2 \sqrt{a}$$

**Př. 7:** Zjednoduš pomocí předchozího pravidla následující výrazy:

a)  $\sqrt[12]{2^{18}}$

b)  $\sqrt[4]{4}$

c)  $\sqrt[3]{a\sqrt{a^{10}}}$

d)  $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^2} \cdot \sqrt[6]{a^3} \cdot \sqrt[10]{a^5}}$

a)  $\sqrt[12]{2^{18}} = \sqrt[2 \cdot 6]{2^{3 \cdot 6}} = \sqrt[2]{2^3} = 2\sqrt{2}$

b)  $\sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2} = \sqrt[2 \cdot 2]{2^2} = \sqrt{2} = \sqrt{2}$

c)  $\sqrt[3]{a\sqrt{a^{10}}} = \sqrt[3]{aa^5} = \sqrt[3]{a^6} = a^2$

d)  $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^2} \cdot \sqrt[6]{a^3} \cdot \sqrt[10]{a^5}} = \sqrt[3]{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = \sqrt[3]{\sqrt{a^3}} = \sqrt{\sqrt[3]{a^3}} = \sqrt{a}$

Poslední vztah nepoužíváme pouze pro zjednodušování odmocnin, ale někdy i obráceně.

Zkusíme napsat výraz  $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^3}$  jednou odmocninou.  $\Rightarrow$  **Problém:** vzorec  $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$  můžeme použít pouze v případě, že jde o stejný typ odmocniny, zatím máme každou odmocninu jinou.

Vzorec  $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^{mp}}} = \sqrt[n]{a^m}$  nám umožní změnit:

- $\sqrt[3]{a^2}$  na odmocninu šestou, devátou, dvanáctou, patnáctou...
- $\sqrt[4]{a^3}$  na odmocninu osmou, dvanáctou, šestnáctou ...

$\Rightarrow$  Obě odmocniny převedeme na dvanácté (připomíná to převádění na společný jmenovatel při sčítání zlomků):  $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^3} = \sqrt[3 \cdot 4]{a^{2 \cdot 4}} \cdot \sqrt[4 \cdot 3]{a^{3 \cdot 3}} = \sqrt[12]{a^8} \cdot \sqrt[12]{a^9} = \sqrt[12]{a^8 \cdot a^9} = \sqrt[12]{a^{17}} = \sqrt[12]{a^{17}} = a \cdot \sqrt[12]{a^5}$ .

**Př. 8:** Vyjádři součin pomocí jediné odmocniny:

a)  $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9}$

b)  $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[5]{9}$

c)  $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[6]{a^5}$

a)  $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[2]{3} \cdot \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[2 \cdot 3]{3^3 \cdot 3^2} = \sqrt[6]{3^3 \cdot 3^4} = \sqrt[6]{3^7} = 3 \cdot \sqrt[6]{3}$

b)  $\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[5]{9} = \sqrt[20]{3^{10}} \cdot \sqrt[20]{3^5} \cdot \sqrt[20]{3^8} = \sqrt[20]{3^{10+5+8}} = \sqrt[20]{3^{23}} = 3 \cdot \sqrt[20]{3^3}$

c)  $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[6]{a^5} = \sqrt[2]{a^3} \cdot \sqrt[3]{a^{2 \cdot 2}} \cdot \sqrt[6]{a^5} = \sqrt[2]{a^3} \cdot \sqrt[3]{a^4} \cdot \sqrt[6]{a^5} = \sqrt[6]{a^{3+4+5}} = \sqrt[6]{a^{12}} = \sqrt[6]{a^{2 \cdot 6}} = a^2$

**Pedagogická poznámka:** Někteří studenti mají s předchozím příkladem problémy.

V některých případech pomáhá, když studentům ještě jednou připomenete, že chování mocnin a odmocnin připomíná sčítání zlomků.

**Př. 9:** Zjednoduš.

a)  $\sqrt{3\sqrt{3}}$

b)  $\sqrt{\frac{1}{3}\sqrt[3]{9^2}}$

c)  $\sqrt[4]{8\sqrt[3]{4\sqrt{2}}}$

a)  $\sqrt{3\sqrt{3}} = \sqrt{\sqrt{3^2} \cdot \sqrt{3}} = \sqrt{\sqrt{3^3}} = \sqrt[4]{3^3}$

b)  $\sqrt{\frac{1}{3}\sqrt[3]{81}} = \sqrt{\sqrt[3]{\frac{1}{3^3} \cdot 3^4}} = \sqrt{\sqrt[3]{\frac{3^4}{3^3}}} = \sqrt{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[6]{3}$

c)  $\sqrt[4]{8\sqrt[3]{4\sqrt{2}}} = \sqrt[4]{2^3 \sqrt[3]{2^2 \sqrt{2}}} = \sqrt[4]{2^3 \sqrt[3]{2^4 \sqrt{2}}} = \sqrt[4]{2^3 \sqrt[3]{2^5}} = \sqrt[4]{\sqrt[6]{2^{18}} \sqrt[6]{2^5}} = \sqrt[4]{\sqrt[6]{2^{23}}} = \sqrt[24]{2^{23}}$

**Př. 10:** Petáková:

strana 63/cvičení 53 b) e)

strana 64/cvičení 54 b) f)

**Shrnutí:** Odmocnina z odmocniny se „násobí“ jako mocnina z mocniny.