

2.7.15 Mocniny s racionálním mocnitelem

Předpoklady: 020714

Racionální číslo - číslo, které je možné zapsat zlomkem.

Co už umíme s mocninami?

Víme, co znamená:

- $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$
- $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2 \cdot 2}$
- Ale co znamená $2^{\frac{2}{3}}$?

Porovnáme pravidla pro počítání s mocninami a odmocninami:

$$\begin{aligned}\sqrt{ab} &= \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} & (ab)^n &= a^n b^n \\ \sqrt{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} & \left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n} \\ \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} &= \sqrt[mn]{a} & ((a)^r)^s &= a^{sr}\end{aligned}$$

Odmocniny a mocniny se chovají stejně a to určitě nebude samo sebou!

Nejsou odmocniny speciálním typem mocnin?

Pedagogická poznámka: Studenty vyzvu, aby sami vymysleli, jakým racionálním číslem by

bylo možné zapsat $\sqrt{2}$. Je zajímavé, že se vždy objeví pár návrhů na $\frac{1}{2}$ a téměř nic jiného. Bohužel většinou jde pouze o návrhy bez pořádného zdůvodnění. Snažíme se poté diskutovat, jaké dobré důvody existují pro nahrazení odmocniny mocninou na jednu polovinu.

Zkusíme zjistit, jaký exponent by byla druhá odmocnina:

$$\sqrt{2} = 2^p \quad \text{použijeme } (\sqrt{2})^2 = 2^1.$$

$$(\sqrt{2})^2 = (2^p)^2 = 2^1$$

$$2^{2p} = 2^1$$

$$2p = 1$$

$$p = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Možná platí: } \sqrt{2} = (2)^{\frac{1}{2}}.$$

Zkusíme, zda funguje upravování odmocnin.

Př. 1: Spočti: $(\sqrt{2})^3$ a $\sqrt{2^8}$ do dvou sloupců, jednak klasicky pomocí vzorců pro úpravy odmocnin a jednak nahrazením $\sqrt{(\quad)} = (\quad)^{\frac{1}{2}}$ a použitím vzorců pro úpravy mocnin.

Úprava pomocí vzorců pro odmocniny.

Úprava pomocí vzorců pro mocniny

$$(\sqrt{2})^3 = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2^8} = \sqrt{(2^4)^2} = 2^4$$

(používáme $\sqrt{(\quad)} = (\quad)^{\frac{1}{2}}$).

$$\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 2^{\frac{3}{2}} = 2^{1+\frac{1}{2}} = 2^1 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2^8} = (2^8)^{\frac{1}{2}} = 2^{8 \cdot \frac{1}{2}} = 2^4$$

U všech předchozích výpočtů bychom místo $\sqrt{(\quad)}$ mohli psát $(\quad)^{\frac{1}{2}}$. Zdá se, že pro druhou odmocninu platí: $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$.
Jak je to se třetí odmocninou?

Př. 2: Navrhni nahrazení třetí odmocniny mocninou.

$\sqrt[3]{a} = a^p$ použijeme $(\sqrt[3]{a})^3 = a$.

$$(\sqrt[3]{a})^3 = (a^p)^3 = a^1$$

$$a^{3p} = a^1$$

$$3p = 1$$

$$p = \frac{1}{3} \Rightarrow \sqrt[3]{a} = (a)^{\frac{1}{3}}$$

Př. 3: Podobně jako v příkladu 1 ověř, že je možné třetí odmocninu nahradit racionálním mocnitelem.

Zkoušíme $\sqrt[3]{a} = (a)^{\frac{1}{3}}$.

Úprava pomocí vzorců pro odmocniny.

$$(\sqrt[3]{a})^7 = \sqrt[3]{a^7} = \sqrt[3]{a^6 \cdot a} = \sqrt[3]{a^6} \sqrt[3]{a} = a^2 \sqrt[3]{a}$$

$$(\sqrt[3]{a})^{12} = \sqrt[3]{(a^4)^3} = a^4$$

Úprava pomocí vzorců pro mocniny

(používáme $\sqrt[3]{(\quad)} = (\quad)^{\frac{1}{3}}$).

$$(\sqrt[3]{a})^7 = \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^7 = a^{\frac{7}{3}} = a^{2+\frac{1}{3}} = a^2 a^{\frac{1}{3}} = a^2 \sqrt[3]{a}$$

$$(\sqrt[3]{a})^{12} = \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{12} = a^{\frac{12}{3}} = a^4$$

Pedagogická poznámka: Počáteční část hodiny je možné poměrně snadno urychlit i zpomalit. Většinou u příkladu nečekám, až ho udělají všichni, a nechám ho vypracovat pouze těm nejrychlejším, ostatní se něj jenom podívají.

Nápad funguje i pro $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}} \Rightarrow$ zřejmě platí: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$, $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

Vysvětluje se vzorec: $\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$. $(\sqrt[np]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{np}} = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m})$

Pedagogická poznámka: Rozdíly ve způsobu vnímání matematiky ukazují moje neúspěšná

snaha přesvědčit jednu studentku o tom, že postup $\sqrt[np]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{np}} = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ ukazuje „krácení v odmocninách“ lépe než jenom uvedení vzorce ve větě z minulé hodiny.

Naše úvahy nejsou matematicky dostatečně průkazné, ale jiní to dokázali za nás platí:

Pro každé kladné reálné číslo a , pro každé přirozené číslo n platí: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

Pro každé kladné reálné číslo a , pro každé celé číslo m , pro každé přirozené číslo n platí: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

Př. 4: Zapiš pomocí racionálního mocnitele:

a) $\sqrt[7]{3}$ b) $\sqrt[6]{a^3}$ c) $\sqrt[5]{a^{-6}}$ d) $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{a}}\right)^6$

a) $\sqrt[7]{3} = 3^{\frac{1}{7}}$ b) $\sqrt[6]{a^3} = a^{\frac{3}{6}} = a^{\frac{1}{2}}$ c) $\sqrt[5]{a^{-6}} = a^{-\frac{6}{5}}$

d) $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{a}}\right)^6 = \frac{1}{(\sqrt[4]{a})^6} = (\sqrt[4]{a})^{-6} = a^{-\frac{6}{4}} = a^{-\frac{3}{2}}$

Pedagogická poznámka: Problémy se vyskytují prakticky jenom v posledním bodě d), kde se snažím trvat na starém „nemusíte dělat všechno na jednou, po malých správných krocích se musíte dostat až k výsledku. Většinou si ukazujeme, že právě u bodu d) správných cest existuje více.

Následkem předchozích definic se pravidla pro počítání s odmocninami sloučí s pravidly pro počítání s mocninami

Pro všechna kladná reálná čísla a, b a pro všechna racionální čísla r, s platí:

$$(a^r)^s = a^{r \cdot s} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r} \qquad (ab)^r = a^r b^r$$

$$a^r a^s = a^{r+s} \qquad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

Pedagogická poznámka: Studenti se s racionálními mocniteli sžívají pro mě až překvapivě snadno a následující příklady jim nedělají v podstatě žádné potíže. V případě bezradnosti stačí odkázat na rámeček se vzorci.

Př. 5: Zjednoduš výrazy:

$$\text{a) } a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{4}{3}} \quad \text{b) } \left(a^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{9}{2}} \quad \text{c) } \frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}} \quad \text{d) } \frac{a \cdot a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}$$

$$\text{a) } a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{4}{3}} = a^{\frac{2+4}{3}} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$$

$$\text{b) } \left(a^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{9}{2}} = a^{\frac{9 \cdot 4}{2 \cdot 3}} = a^{\frac{36}{6}} = a^6$$

$$\text{c) } \frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}} = a^{\frac{4-3}{6}} = a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}$$

$$\text{d) } \frac{a \cdot a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}} = a^{1 + \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)} = a^2$$

Pedagogická poznámka: U následujících příkladů se někteří vzpírají a chtějí k úpravám nadále používat odmocniny. Z cvičných důvodů trvám na použití racionálních mocnin s tím, že později si samozřejmě mohou vybrat.

Př. 6: Částečně odmocni převedením na racionálního mocnitele $\sqrt[6]{a^{15}}$.

$$\sqrt[6]{a^{15}} = a^{\frac{15}{6}} = a^{\frac{5}{2}} = a^{2 + \frac{1}{2}} = a^2 \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^2 \sqrt{a}$$

Př. 7: Zjednoduš následující výrazy převedením na racionálního mocnitele.

$$\text{a) } \sqrt[12]{2^{18}} \quad \text{b) } \sqrt[4]{4} \quad \text{c) } \sqrt[3]{a\sqrt{a^{10}}}$$

$$\text{a) } \sqrt[12]{2^{18}} = 2^{\frac{18}{12}} = 2^{\frac{3}{2}} = 2^{1 + \frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{b) } \sqrt[4]{4} = 4^{\frac{1}{4}} = (2^2)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$\text{c) } \sqrt[3]{a\sqrt{a^{10}}} = \left(a(a^{10})^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(a \cdot a^{\frac{10}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = (a \cdot a^5)^{\frac{1}{3}} = (a^6)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$$

Př. 8: Vyjádři součin pomocí jediné odmocniny převedením na racionálního mocnitele.

$$\text{a) } \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9} \quad \text{b) } \sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[5]{9} \quad \text{c) } \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[6]{a^5}$$

$$\text{a) } \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot (3^2)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{1+2}{3}} = 3^{\frac{3+4}{6}} = 3^{\frac{7}{6}} = 3 \cdot \sqrt[6]{3}$$

$$\text{b) } \sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[5]{9} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{2}{5}} = 3^{\frac{10+5+8}{20}} = 3^{\frac{23}{20}} = 3 \cdot \sqrt[20]{3^3}$$

$$\text{c) } \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[6]{a^5} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{5}{6}} = a^{\frac{1+2+5}{3+2+6}} = a^{\frac{3+4+5}{6}} = a^{\frac{12}{6}} = a^2$$

Pedagogická poznámka: Další příklady následují v první polovině příští hodiny.

Př. 9: Petáková:
strana 63/cvičení 49 e) h) i)
strana 63/cvičení 50 e)
strana 63/cvičení 51 b) c) f)
strana 63/cvičení 42 c) f)

Shrnutí: Odmocniny můžeme nahradit mocninami s racionálním mocnitelem.