

2.7.17 Nerovnice s neznámou pod odmocninou

Předpoklady: 2205, 2715

Pedagogická poznámka: Tato hodina patří mezi největší masakry během celého studia. Její obtížnost spočítává hlavně ve dvou věcech:

a) Je nutné, aby studenti uměli řešit kvadratické nerovnice (což je dva měsíce po jejich probrání poměrně odvážný požadavek).

b) Studenti si musí udržet přehled o tom, co a proč vlastně dělají. Doporučuji dopředu upozornit studenty na nezbytnost rychlého řešení kvadratických nerovnic a toto upozornění ještě podepřít hrozbou nějaké znamínkové písemky.

Já osobně první část hodiny (úvodní rozbor a první dva lehké příklady) proberu o běžné hodině, další dva příklady pak studenti řeší zcela samostatně na cvičení. Většina z nich více nestihne (velká část nezvládne ani to), Ti rychlejší pak mají k dispozici sbírku.

Jsem přesvědčen, že řešení těžších příkladů na tabuli nemá valný smysl, protože při možnosti opisování se studenti v samostatné orientaci v příkladu vůbec neprocvičí.

Při pomoci v lavici se vždy ptám na to, zda studenti vědí, u kterého bodu postupu jsou, co právě dělají a co jim právě vyšlo.

Jak bychom řešili nerovnici $\sqrt{x^2 + x + 2} > x - 3$?

Musíme dostat x z pod odmocniny \Rightarrow potřebujeme umocnit nerovnici.

Co udělá umocnění s nerovností?

Stejně jako u rovnic záleží na znaménkách, které mají obě strany nerovnosti v intervalu $(a;b)$:

- **1. V intervalu $(a;b)$ jsou obě strany nerovnice kladné $L > 0, P > 0$.**

$$3 > 2 \quad /^2$$

$9 > 4$ To je pravda. Nerovnost se zachovává, z většího čísla získáme větší druhou mocninu \Rightarrow **umocníme, nemusíme nic jiného dělat, vzniklou nerovnici vyřešíme.**

- **2. V intervalu $(a;b)$ jsou obě strany nerovnice záporné $L < 0, P < 0$.**

$$(-3) < (-2) \quad /^2$$

$9 < 4$ To není pravda. Menší záporné číslo, má větší absolutní hodnotu, po umocnění se znaménko ztratí \Rightarrow **musíme umocnit a zároveň obrátit nerovnost, pak vyřešit vzniklou nerovnici.**

- **3. V intervalu $(a;b)$ mají obě strany nerovnice různá znaménka $L > 0, P < 0$.**

Nemusíme nic počítat, je rozhodnuto.

Platí: $L > 0, 0 > P$ a tedy $L > P \Rightarrow$ pokud má nerovnice má tvar $\sqrt{x^2 + x + 2} > x - 3$, tedy $L > P$. Nemusíme nic počítat, je rozhodnuto. Všechna čísla, pro která platí $L > 0, P < 0$, nerovnici vyhovují.

- **4. V intervalu $(a;b)$ mají obě strany nerovnice různá znaménka $L < 0, P > 0$.**

Nemusíme nic počítat, je rozhodnuto.

Platí: $L < 0, 0 < P$ a tedy $L < P \Rightarrow$ pokud má nerovnice má tvar $\sqrt{x^2 + x + 2} > x - 3$,

tedy $L > P$. Nemusíme nic počítat, je rozhodnuto, žádné číslo, pro které platí $L < 0$, $P > 0$, nerovnici vyhovuje.

⇒ Řešení nerovnic s odmocninami není žádná sranda, musíme se dobře orientovat v tom, co vlastně děláme. Neobejdeme se bez podmínek a řešení nerovnic, které rozhodují o znaménkách jednotlivých stran.

Smůla: Zkouška nám příliš nepomůže, protože nemůžeme vyzkoušet dosazením nekonečně mnoho čísel.

⇒ Budeme postupovat ve třech krocích:

1. Uděláme podmínky pro odmocniny a zjistíme, kdy je do nerovnice možné dosazovat.
2. Zjistíme znaménka obou stran nerovnice (interval, kdy jsou strany kladné a kdy záporné).
3. Podle rozboru uvedeného výše nerovnice umocníme a dořešíme nebo rovnou napíšeme řešení.

Př. 1: Vyřeš nerovnici $2\sqrt{2x+3} > 7$.

a) podmínky pro odmocniny

Pod odmocninou musí být nezáporné číslo ⇒ řešíme nerovnici $2x+3 \geq 0$.

$$2x \geq -3$$

$x \geq -\frac{3}{2}$ ⇒ aby pod odmocninou nebylo záporné číslo, můžeme dosazovat pouze

$$x \in \left(-\frac{3}{2}; \infty\right).$$

b) znaménka

Levá strana: dvojnásobek odmocniny ⇒ vždy nezáporná $L = +$.

Pravá strana: $P = 7$ - kladné číslo $P = +$.

c) řešení

Řešit můžeme pouze pro $x \in \left(-\frac{3}{2}; \infty\right)$. Pro všechna tato čísla platí: $L \geq 0$ $P > 0$ ⇒ obě

strany nezáporné, nerovnici můžeme umocnit a nemusíme obracet nerovnost.

$$2\sqrt{2x+3} > 7 \quad /^2$$

$$\left(2\sqrt{2x+3}\right)^2 > (7)^2$$

$$4(2x+3) > 49$$

$$8x+12 > 49$$

$$8x > 37$$

$$x > \frac{37}{8}$$

$$K = \left(\frac{37}{8}; \infty\right)$$

Př. 2: Vyřeš nerovnici $\sqrt{x^2+x+2} > x-3$.

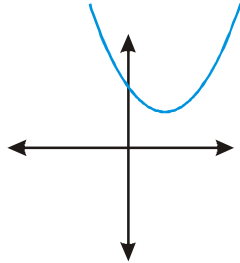
a) podmínky

Pod odmocninou musí být nezáporné číslo \Rightarrow řešíme nerovnici $x^2 + x + 2 \geq 0$.

Hledáme kořeny rovnice $x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2} \Rightarrow \text{rovnice } x^2 + x + 2 = 0 \text{ nemá řešení.}$$

Před x je kladné číslo – „d'olík“.



Nerovnice $x^2 + x + 2 \geq 0$ platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$, za x můžeme dosadit cokoliv a pod odmocninou bude kladné číslo.

b) znaménka

- Levá strana: odmocnina \Rightarrow vždy nezáporná $L > 0$.
- Pravá strana: $P = x - 3$ - může být kladná i záporná.
 $x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$
 $x \in (-\infty; 3) \Rightarrow P \leq 0$ pravá strana záporná.
 $x \in \langle 3; \infty \rangle \Rightarrow P \geq 0$ pravá strana kladná.

c) řešení

1. $x \in (-\infty; 3): L > 0 \quad P \leq 0 \Rightarrow L > P$

To je to, co chceme $\Rightarrow K_1 = (-\infty; 3)$.

2. $x \in \langle 3; \infty): L \geq 0 \quad P \geq 0$

Obě strany kladné, nerovnici můžeme umocnit a nemusíme obracet nerovnost.

$$\sqrt{x^2 + x + 2} > x - 3 \quad /^2$$

$$(\sqrt{x^2 + x + 2})^2 > (x - 3)^2$$

$$x^2 + x + 2 > x^2 - 6x + 9$$

$$7x > 7$$

$$x > 1$$

$$K_2 = \langle 3; \infty \rangle$$

$$K = (-\infty; 3) \cup \langle 3; \infty \rangle = \mathbb{R}$$

Pedagogická poznámka: Najdou se tací, co už po dosazení do vzorce pro kvadratickou rovnici prohlásí, že nerovnice nemá řešení.

Velkým problémem je však zejména situace v intervalu $(-\infty; 3)$, kdy se mnozí nedokážou srovnat se faktem, že už nemusí nic počítat a rovnou mohou napsat výsledek.

Pedagogická poznámka: Více o této hodině nespočítáme a zbytek zůstává na cvičení (čím dříve po hodině, tím lépe).

Pedagogická poznámka: Jak již bylo uvedeno na začátku hodiny, naprostá většina chyb vyvěrá z toho, že studenti nejsou schopni si udržet přehled o tom, co vlastně dělají, ve které části řešení příkladu se právě nacházejí a jaký význam má to, co právě spočítali. Proto se zabýváme hlavně tím, kde se nacházejí a jak si mají zapsat poznámky, aby se orientovali.

Pedagogická poznámka: Boj s následujícím dvěma příklady patří mezi ty výjimky, kdy opíšu zadání (u dvou příkladů to není problém) na tabuli a na projektoru nechávám řešení zobrazovat delší dobu.

Př. 3: Vyřeš nerovnici $\sqrt{x-x^2+12} < \sqrt{7-3x}$.

a) podmínky

Pod odmocninou musí být nezáporné číslo \Rightarrow

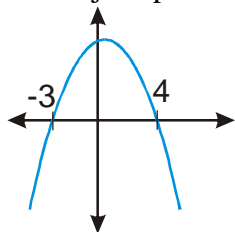
- **Levá strana:** řešíme nerovnici $-x^2 + x + 12 \geq 0$.

Hledáme kořeny rovnice $-x^2 + x + 12 = 0 \Rightarrow$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 12}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{-2} = \frac{1 \pm 7}{-2}$$

$$x_1 = 4, x_2 = -3.$$

Před x je záporné číslo – „kopeček“.



Do levé strany nerovnice můžeme dosazovat pouze $x \in \langle -3; 4 \rangle$.

- **Pravá strana:** řešíme nerovnici $7 - 3x \geq 0$.

$$7 \geq 3x$$

$$\frac{7}{3} \geq x$$

Do pravé strany nerovnice můžeme dosazovat pouze $x \in \left(-\infty; \frac{7}{3} \right]$.

Nerovnici můžeme řešit pouze pro $x \in \left\langle -3; \frac{7}{3} \right\rangle$.

b) znaménka

Levá strana: odmocnina \Rightarrow vždy nezáporná $L \geq 0$

Pravá strana: odmocnina \Rightarrow vždy nezáporná $P \geq 0$

c) řešení

Obě strany jsou nezáporné, nerovnici můžeme umocnit a nemusíme obracet nerovnost.

$$\sqrt{x-x^2+12} < \sqrt{7-3x} \quad /^2$$

$$\left(\sqrt{x-x^2+12}\right)^2 < \left(\sqrt{7-3x}\right)^2$$

$$x-x^2+12 < 7-3x$$

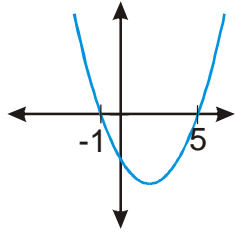
$$0 < x^2 - 4x - 5$$

Řešíme nerovnici $x^2 - 4x - 5 > 0$.

Hledáme kořeny rovnice $x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 = (x-5)(x+1) = 0$

$x_1 = 5, x_2 = -1$.

Před x je kladné číslo – „d'olík“.



Řešením nerovnice $x^2 - 4x - 5 > 0$ jsou $x \in (-\infty; -1) \cup (5; \infty)$.

My jsme nerovnici řešili pouze pro $x \in \left\langle -3; \frac{7}{3} \right\rangle$.

Řešením nerovnice $\sqrt{x - x^2 + 12} < \sqrt{7 - 3x}$ je $K = \langle -3; -1 \rangle$.

Př. 4: Vyřeš nerovnici $3\sqrt{3x - x^2 - 2} \geq x$.

a) podmínky

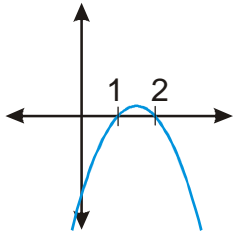
Pod odmocninou musí být nezáporné číslo. \Rightarrow

- **Levá strana:** řešíme nerovnici $3x - x^2 - 2 \geq 0$.

Hledáme kořeny rovnice $3x - x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) = 0$

$x_1 = 1, x_2 = 2$.

Před x je záporné číslo – „kopeček“.



Nerovnici můžeme řešit pouze pro $x \in \langle 1; 2 \rangle$.

b) znaménka

Levá strana: odmocnina \Rightarrow vždy nezáporná $L \geq 0$.

Pravá strana: $P = x$ - může být kladná i záporná.

- $x \in (-\infty; 0) \Rightarrow P \leq 0$ pravá strana záporná.
- $x \in \langle 0; \infty \rangle \Rightarrow P \geq 0$ pravá strana kladná.

Nerovnici však řešíme pouze pro $x \in \langle 1; 2 \rangle$, pro tato x je pravá strana vždy kladná.

c) řešení

Řešíme pouze pro $x \in \langle 1; 2 \rangle$.

Obě strany jsou kladné, nerovnici můžeme umocnit a nemusíme obracet nerovnost.

$$3\sqrt{3x - x^2 - 2} \geq x \quad /^2$$

$$\left(3\sqrt{3x - x^2 - 2}\right)^2 \geq (x)^2$$

$$3^2(\sqrt{3x-x^2-2})^2 \geq x^2$$

$$9(3x-x^2-2) \geq x^2$$

$$27x-9x^2-18 \geq x^2$$

$$0 \geq 10x^2-27x+18$$

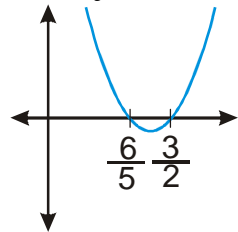
Řešíme nerovnici $10x^2-27x+18 \leq 0$.

Hledáme kořeny rovnice $10x^2-27x+18=0 \Rightarrow$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(-27) \pm \sqrt{(-27)^2-4 \cdot 10 \cdot 18}}{2 \cdot 10} = \frac{27 \pm \sqrt{9}}{20} = \frac{27 \pm 3}{20}$$

$$x_1 = \frac{24}{20} = \frac{6}{5}, \quad x_2 = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}$$

Před x je kladné číslo – „d'olík“.



Řešením nerovnice $10x^2-27x+18 \leq 0$ jsou $x \in \left\langle \frac{6}{5}; \frac{3}{2} \right\rangle$.

My jsme nerovnici řešili pouze pro $x \in \langle 1; 2 \rangle$.

Řešením nerovnice $3\sqrt{3x-x^2-2} \geq x$ je množina $K = \left\langle \frac{6}{5}; \frac{3}{2} \right\rangle$.

Př. 5: Petáková:

strana 14/cvičení 21 a) b) c) d)

Shrnutí: Před umocněním nerovnice musíme vědět, jaká znaménka mají její strany.