2.7.19 Řešení nerovnic metodou nulových bodů II

Předpoklady: 2718

Pedagogická poznámka: Problémy jsou stejné jako v minulé hodině. Nejčastěji studenti přestanou chápat, kde se v případu vlastně nacházejí.

Minulou hodinu jsme se naučili řešit nerovnice s neznámou pod odmocninou pomocí metody nulových bodů. Zopakujeme si tento postup:

Postup řešení nerovnici metodou nulových bodů (např. nerovnice $3\sqrt{3x-x^2-2}\geq x$**) :**

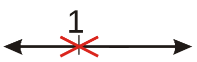
1. Zjistíme pro která x nejsou libovolné výrazy v nerovnici definované - výsledky nakreslíme na číselnou osu. (Kdy není definovaný libovolný výraz v nerovnici $3\sqrt{3x-x^2-2}\geq x$). **Našli jsme body přetržení.**
2. Vyřešíme rovnici $f(x)=0$ (např. $3\sqrt{3x-x^2-2}=x$) a výsledky přikreslíme na osu. **Našli jsme body přechodu přes osu *x*.**
3. Na ose vznikly intervaly. **Z každého vzniklého intervalu dosadíme do nerovnice libovolné vhodné číslo.** Pokud pro něj nerovnice vyjde, vyjde i pro všechny další čísla v intervalu. Pokud nevyjde, tak nevyjde pro žádná čísla v tomto intervalu.
4. **Nerovnice je vyřešena.**

a ukážeme si, že tímto způsobem je možné řešit všechny druhy nerovnic, se kterými jsme se zatím setkali.

Př. 1: Vyřeš nerovnici $\frac{1}{x-1}\geq 1$ metodou nulových bodů.

1. Zjišťujeme podmínky existence výrazů na obou stranách nerovnice

levá strana: nelze dělit nulou $\Rightarrow$ $x-1=0\Rightarrow x=1$



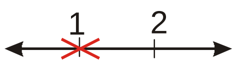
Nerovnici můžeme řešit pouze pro $x\neq 1$.

2. Hledáme řešení rovnice $\frac{1}{x-1}=1$ **(abychom objevili nulové body nerovnice), kde funkce přechází přes osu *x*.**

$\frac{1}{x-1}=1 \quad /\cdot(x-1)$

$1=x-1$

$x=2$

Doplníme získaný kořen na osu: 

3. Testujeme jednotlivé intervaly, zda splňují nerovnost

- interval $(-\infty;1)$: vybereme číslo například 0:

  $\frac{1}{x-1}\geq 1$ $\qquad\qquad$ $\frac{1}{0-1}\geq 1$

  $-1\geq 1$ - neplatí $\Rightarrow$ interval $(-\infty;1)$ není řešením

- interval $(1;2)$: vybereme číslo například 1,5:

  $\frac{1}{x-1} \geq 1$ $\qquad$ $\frac{1}{1{,}5-1} \geq 1$

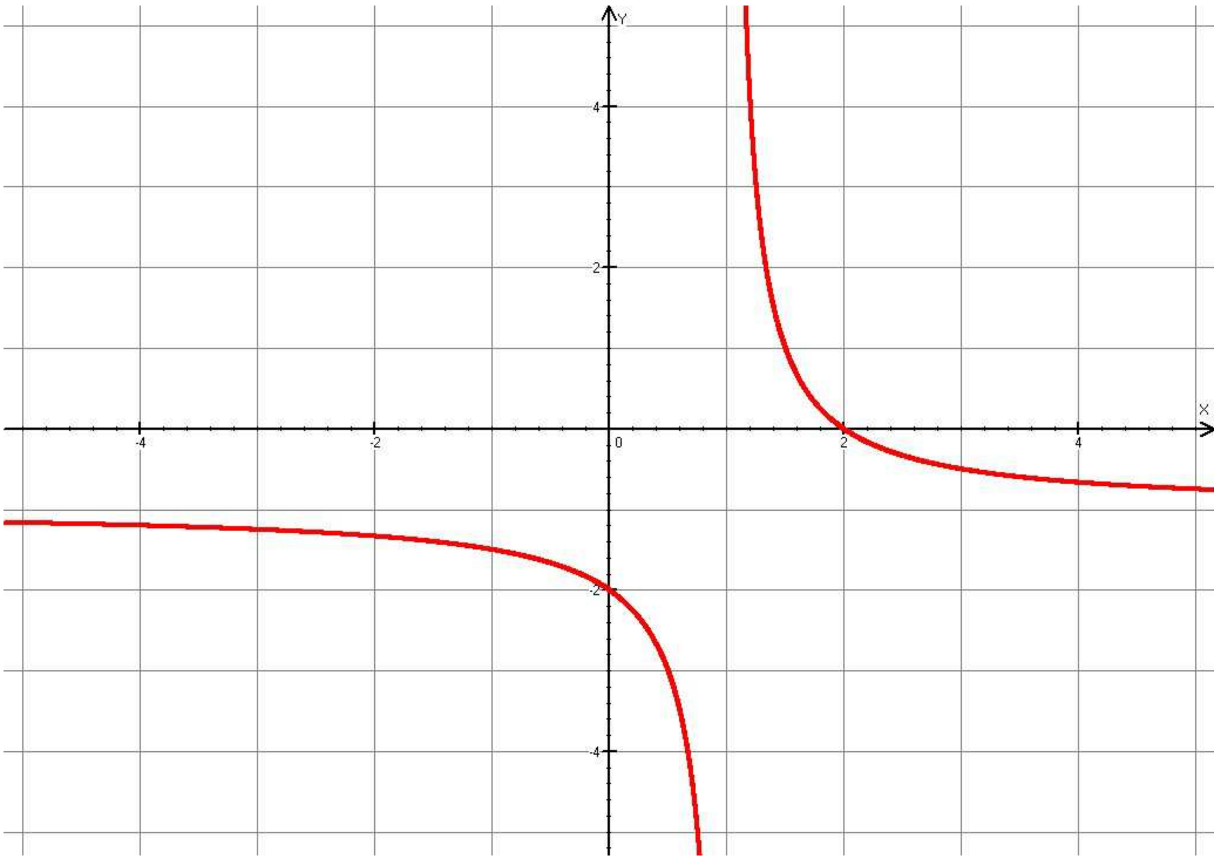
  $2 \geq 1$ - platí $\Rightarrow$ interval $(1;2)$ je řešením
- interval $(2;\infty)$: vybereme číslo například 3:

  $\frac{1}{x-1} \geq 1$ $\qquad$ $\frac{1}{3-1} \geq 1$

  $0{,}5 \geq 1$ - neplatí $\Rightarrow$ interval $(2;\infty)$ není řešením

Protože řešená nerovnice má nerovnost $\geq$ přidáme k nalezenému intervalu ještě nulový bod $\Rightarrow$ $K = (1;2\rangle$

Poznámka: Správnost řešení předchozí nerovnice si můžeme ověřit pomocí grafu funkce $y = \frac{1}{x-1} - 1$



Př. 2: Vyřeš nerovnici $\frac{x^2-2x-2}{x^2-x-12} \geq 0$ metodou nulových bodů.

1. Zjišťujeme podmínky existence výrazů na obou stranách nerovnice

levá strana: nelze dělit nulou $\Rightarrow$ $x^2 - x - 12 = (x-4)(x+3) = 0 \Rightarrow x_1 = -3;\ x_2 = 4$

Nerovnici můžeme řešit pouze pro $x \neq -3; 4$.

2. Hledáme řešení rovnice $\frac{x^2-2x-2}{x^2-x-12}=0$ (abychom objevili nulové body nerovnice), kde funkce přechází přes osu *x*.

$\frac{x^2-2x-2}{x^2-x-12}=0$ - záleží pouze na čitateli

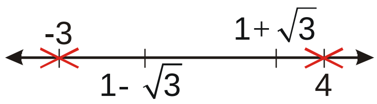
$x^2-2x-2=0$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot(-2)}}{2\cdot1}=\frac{2\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{2\pm2\sqrt{3}}{2}=1\pm\sqrt{3}$$

$x_1=1-\sqrt{3}$

$x_2=1+\sqrt{3}$

Doplníme získané kořeny na osu:



3. Testujeme jednotlivé intervaly, zda splňují nerovnost

- interval $(-\infty;-3)$: vybereme číslo například -10:

  $\frac{x^2-2x-2}{x^2-x-12}\geq 0$ $\qquad$ $\frac{(-10)^2-2(-10)-2}{(-10)^2-(-10)-12}\geq 0$

  $1,2\geq 0$ - platí $\Rightarrow$ interval $(-\infty;-3)$ je řešením

- interval $\left(-3;1-\sqrt{3}\right)$: vybereme číslo například -2:

  $\frac{x^2-2x-2}{x^2-x-12}\geq 0$ $\qquad$ $\frac{(-2)^2-2(-2)-2}{(-2)^2-(-2)-12}\geq 0$

  $-1\geq 0$ - neplatí $\Rightarrow$ interval $\left(-3;1-\sqrt{3}\right)$ není řešením

- interval $\left(1-\sqrt{3};1+\sqrt{3}\right)$: vybereme číslo například 0:

  $\frac{x^2-2x-2}{x^2-x-12}\geq 0$ $\qquad$ $\frac{(0)^2-2(0)-2}{(0)^2-(0)-12}\geq 0$

  $0,167\geq 0$ - platí $\Rightarrow$ interval $\left(1-\sqrt{3};1+\sqrt{3}\right)$ je řešením

- interval $\left(1+\sqrt{3};4\right)$: vybereme číslo například 3:

  $\frac{x^2-2x-2}{x^2-x-12}\geq 0$ $\qquad$ $\frac{(3)^2-2(3)-2}{(3)^2-(3)-12}\geq 0$

  $-0,167\geq 0$ - neplatí $\Rightarrow$ interval $\left(1+\sqrt{3};4\right)$ není řešením

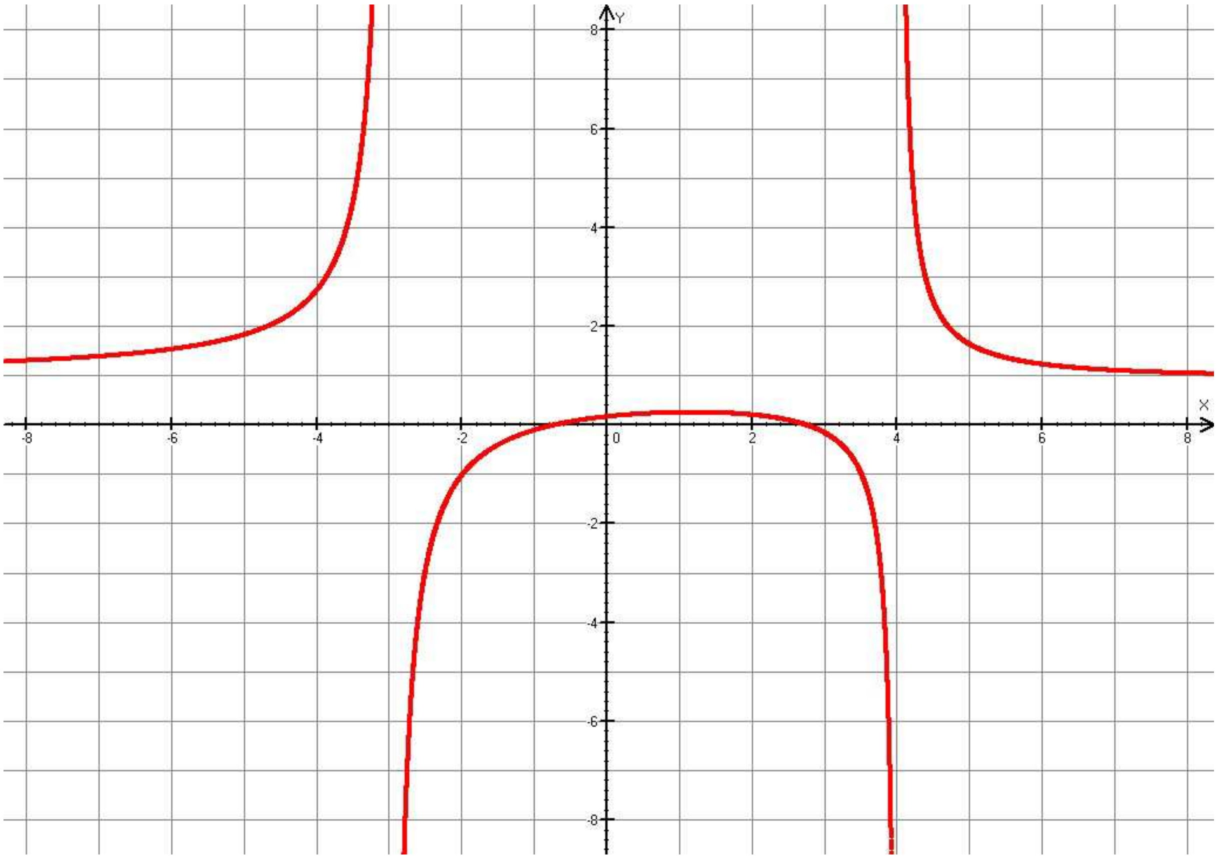
- interval $(4;\infty)$: vybereme číslo například 5:

  $\frac{x^2-2x-2}{x^2-x-12}\geq 0$ $\qquad$ $\frac{(5)^2-2(5)-2}{(5)^2-(5)-12}\geq 0$

  $1,625\geq 0$ - platí $\Rightarrow$ interval $(4;\infty)$ je řešením

Protože řešená nerovnice má nerovnost $\geq$ přidáme k nalezeným intervalům ještě nulové body $\Rightarrow\ K = (-\infty;-3) \cup \langle 1-\sqrt{3};1+\sqrt{3}\rangle \cup (4;\infty)$

Poznámka: Správnost řešení předchozí nerovnice si můžeme ověřit pomocí grafu funkce $y = \dfrac{x^2-2x-2}{x^2-x-12}$



Pedagogická poznámka: Nejčastější chybou v předchozím příkladu je výpočet rovnice, kdy

někteří rovnici násobí takto: $\dfrac{x^2-2x-2}{x^2-x-12} = 0 \quad / \cdot (x^2-x-12)$

$x^2-2x-2 = x^2-x-12$ a neuvědomí si, že pravá strana rovnice je nulová.

Metodou nulových bodů můžeme řešit i nerovnice, které jsme dosud raději přehlíželi:

Př. 3: Vyřeš nerovnici $\dfrac{x^2-3x-22}{x^2-x-12} \geq 2$ metodou nulových bodů.

1. Zjišťujeme podmínky existence výrazů na obou stranách nerovnice
levá strana: nelze dělit nulou $\Rightarrow\ x^2-x-12 = (x-4)(x+3) = 0 \Rightarrow x_1 = -3;\ x_2 = 4$

Nerovnici můžeme řešit pouze pro $x \neq -3; 4$.

2. Hledáme řešení rovnice $\dfrac{x^2-3x-22}{x^2-x-12} = 2$ **(abychom objevili nulové body nerovnice), kde funkce přechází přes osu *x*.**

$$\frac{x^2-3x-22}{x^2-x-12}=2 \quad /\cdot\left(x^2-x-12\right)$$

$$x^2-3x-22=2\left(x^2-x-12\right)$$

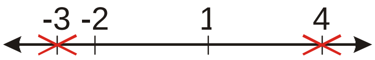
$$x^2-3x-22=2x^2-2x-24$$

$$0=x^2+x-2$$

$$x^2+x-2=(x+2)(x-1)=0$$

$$x_1=-2$$

$$x_2=1$$

Doplníme získané kořeny na osu: 

3. Testujeme jednotlivé intervaly, zda splňují nerovnost

- interval $(-\infty;-3)$: vybereme číslo například -10:

  $$\frac{x^2-3x-22}{x^2-x-12}\geq 2 \qquad \frac{(-10)^2-3(-10)-22}{(-10)^2-(-10)-12}\geq 2$$

  $1{,}1\geq 2$ - neplatí $\Rightarrow$ interval $(-\infty;-3)$ není řešením

- interval $(-3;-2)$: vybereme číslo například $-2{,}5$:

  $$\frac{x^2-3x-22}{x^2-x-12}\geq 2 \qquad \frac{(-2{,}5)^2-3(-2{,}5)-22}{(-2{,}5)^2-(-2{,}5)-12}\geq 2$$

  $2{,}5\geq 2$ - platí $\Rightarrow$ interval $(-3;-2)$ je řešením

- interval $(-2;1)$: vybereme číslo například 0:

  $$\frac{x^2-3x-22}{x^2-x-12}\geq 2 \qquad \frac{(0)^2-3(0)-22}{(0)^2-(0)-12}\geq 2$$

  $1{,}83\geq 2$ - neplatí $\Rightarrow$ interval $(-2;1)$ není řešením

- interval $(1;4)$: vybereme číslo například 3:

  $$\frac{x^2-3x-22}{x^2-x-12}\geq 2 \qquad \frac{(3)^2-3(3)-22}{(3)^2-(3)-12}\geq 2$$

  $3{,}68\geq 2$ - platí $\Rightarrow$ interval $(1;4)$ je řešením

- interval $(4;\infty)$: vybereme číslo například 5:

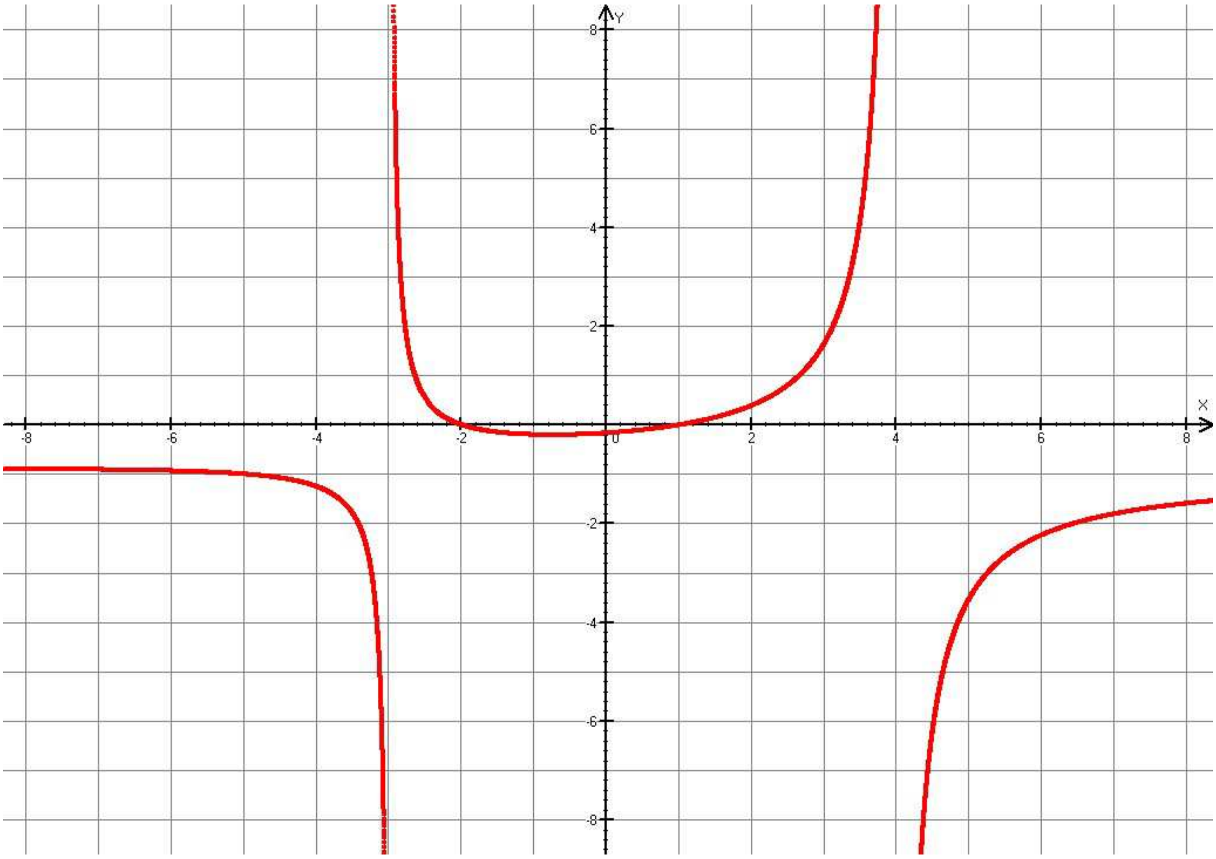
  $$\frac{x^2-3x-22}{x^2-x-12}\geq 2 \qquad \frac{(5)^2-3(5)-22}{(5)^2-(5)-12}\geq 2$$

  $-1{,}5\geq 0$ - neplatí $\Rightarrow$ interval $(4;\infty)$ není řešením

Protože řešená nerovnice má nerovnost $\geq$ přidáme k nalezeným intervalům ještě nulové body

$\Rightarrow \ K=\left(-3;-2\right\rangle\cup\left\langle 1;4\right)$

Poznámka: Správnost řešení předchozí nerovnice si můžeme ověřit pomocí grafu funkce
$y = \frac{x^2 - 3x - 22}{x^2 - x - 12} - 2$



Pedagogická poznámka: Nejčastější chyba v příkladu 3 je „obrácená“ k nejčastější chybě v příkladu 2. Někteří studenti se chovají, jako by pravou stranu opět tvořila nula a nulové body počítají pouze z čitatele zlomku.

Př. 4: Petáková:
strana 12/cvičení 2 g)
strana 12/cvičení 3 e)
strana 14/cvičení 17 g)
strana 14/cvičení 19 d) e)
strana 15/cvičení 23 j) l)

Shrnutí: Metodu nulových bodů můžeme použít na všechny druhy nerovnic, které jsme dosud řešili.