

2.7.19 Řešení nerovnic metodou nulových bodů II

Předpoklady: 2718

Pedagogická poznámka: Problémy jsou stejné jako v minulé hodině. Nejčastěji studenti přestanou chápat, kde se v případě vlastně nacházejí.

Minulou hodinu jsme se naučili řešit nerovnice s neznámou pod odmocninou pomocí metody nulových bodů. Zopakujeme si tento postup:

Postup řešení nerovnic metodou nulových bodů (např. nerovnice $3\sqrt{3x-x^2-2} \geq x$):

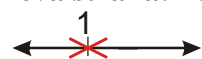
1. Zjistíme pro která x nejsou libovolné výrazy v nerovnici definované - výsledky nakreslíme na číselnou osu. (Kdy není definovaný libovolný výraz v nerovnici $3\sqrt{3x-x^2-2} \geq x$). **Našli jsme body přetržení.**
2. Vyřešíme rovnici $f(x) = 0$ (např. $3\sqrt{3x-x^2-2} = x$) a výsledky přikreslíme na osu. **Našli jsme body přechodu přes osu x .**
3. Na ose vznikly intervaly. **Z každého vzniklého intervalu dosadíme do nerovnice libovolné vhodné číslo.** Pokud pro něj nerovnice vyjde, vyjde i pro všechny další čísla v intervalu. Pokud nevyjde, tak nevyjde pro žádná čísla v tomto intervalu.
4. **Nerovnice je vyřešena.**

a ukážeme si, že tímto způsobem je možné řešit všechny druhy nerovnic, se kterými jsme se zatím setkali.

Př. 1: Vyřeš nerovnici $\frac{1}{x-1} \geq 1$ metodou nulových bodů.

1. Zjistíme podmínky existence výrazů na obou stranách nerovnice

levá strana: nelze dělit nulou $\Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$



Nerovnici můžeme řešit pouze pro $x \neq 1$.

2. Hledáme řešení rovnice $\frac{1}{x-1} = 1$ (abychom objevili nulové body nerovnice), kde

funkce přechází přes osu x .

$$\frac{1}{x-1} = 1 \quad / \cdot (x-1)$$

$$1 = x-1$$

$$x = 2$$

Doplňme získaný kořen na osu:

3. Testujeme jednotlivé intervaly, zda splňují nerovnost

- interval $(-\infty; 1)$: vybereme číslo například 0:

$$\frac{1}{x-1} \geq 1 \qquad \frac{1}{0-1} \geq 1$$

$-1 \geq 1$ - neplatí \Rightarrow interval $(-\infty; 1)$ není řešením

- interval $(1;2)$: vybereme číslo například 1,5:

$$\frac{1}{x-1} \geq 1 \qquad \frac{1}{1,5-1} \geq 1$$

$2 \geq 1$ - platí \Rightarrow interval $(1;2)$ je řešením

- interval $(2;\infty)$: vybereme číslo například 3:

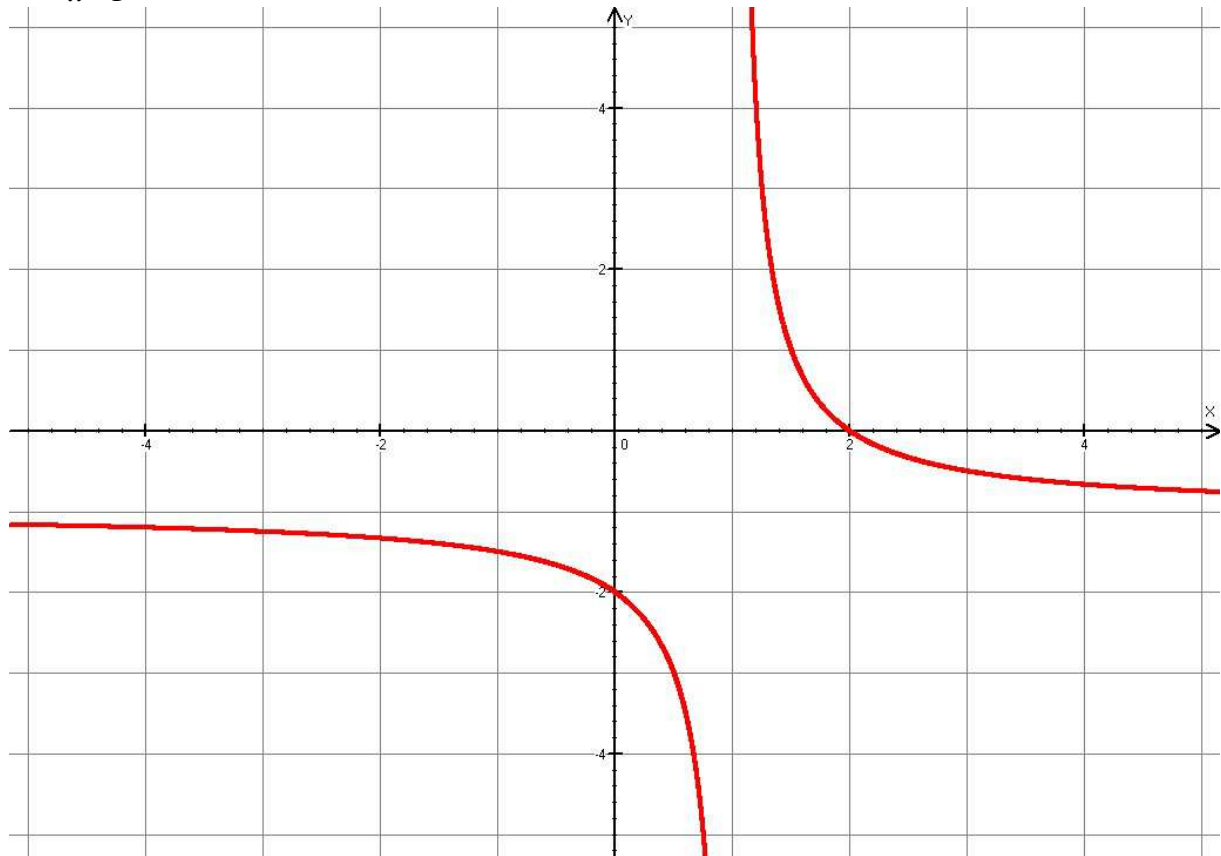
$$\frac{1}{x-1} \geq 1 \qquad \frac{1}{3-1} \geq 1$$

$0,5 \geq 1$ - neplatí \Rightarrow interval $(2;\infty)$ není řešením

Protože řešená nerovnice má nerovnost \geq přidáme k nalezenému intervalu ještě nulový bod
 $\Rightarrow K = (1;2)$

Poznámka: Správnost řešení předchozí nerovnice si můžeme ověřit pomocí grafu funkce

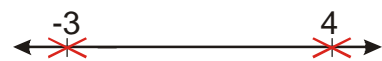
$$y = \frac{1}{x-1} - 1$$



Př. 2: Vyřeš nerovnici $\frac{x^2 - 2x - 2}{x^2 - x - 12} \geq 0$ metodou nulových bodů.

1. Zjišťujeme podmínky existence výrazů na obou stranách nerovnice

levá strana: nelze dělit nulou $\Rightarrow x^2 - x - 12 = (x-4)(x+3) = 0 \Rightarrow x_1 = -3; x_2 = 4$



Nerovnici můžeme řešit pouze pro $x \neq -3; 4$.

2. Hledáme řešení rovnice $\frac{x^2 - 2x - 2}{x^2 - x - 12} = 0$ (abychom objevili nulové body nerovnice), kde funkce přechází přes osu x .

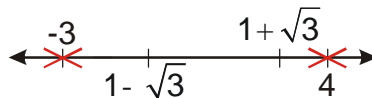
$$\frac{x^2 - 2x - 2}{x^2 - x - 12} = 0 \text{ - záleží pouze na čitateli}$$

$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

$$x_1 = 1 - \sqrt{3}$$

$$x_2 = 1 + \sqrt{3}$$



Doplňme získané kořeny na osu:

3. Testujeme jednotlivé intervaly, zda splňují nerovnost

- interval $(-\infty; -3)$: vybereme číslo například -10:

$$\frac{x^2 - 2x - 2}{x^2 - x - 12} \geq 0 \qquad \frac{(-10)^2 - 2(-10) - 2}{(-10)^2 - (-10) - 12} \geq 0$$

$1,2 \geq 0$ - platí \Rightarrow interval $(-\infty; -3)$ je řešením

- interval $(-3; 1 - \sqrt{3})$: vybereme číslo například -2:

$$\frac{x^2 - 2x - 2}{x^2 - x - 12} \geq 0 \qquad \frac{(-2)^2 - 2(-2) - 2}{(-2)^2 - (-2) - 12} \geq 0$$

$-1 \geq 0$ - neplatí \Rightarrow interval $(-3; 1 - \sqrt{3})$ není řešením

- interval $(1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3})$: vybereme číslo například 0:

$$\frac{x^2 - 2x - 2}{x^2 - x - 12} \geq 0 \qquad \frac{(0)^2 - 2(0) - 2}{(0)^2 - (0) - 12} \geq 0$$

$0,167 \geq 0$ - platí \Rightarrow interval $(1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3})$ je řešením

- interval $(1 + \sqrt{3}; 4)$: vybereme číslo například 3:

$$\frac{x^2 - 2x - 2}{x^2 - x - 12} \geq 0 \qquad \frac{(3)^2 - 2(3) - 2}{(3)^2 - (3) - 12} \geq 0$$

$-0,167 \geq 0$ - neplatí \Rightarrow interval $(1 + \sqrt{3}; 4)$ není řešením

- interval $(4; \infty)$: vybereme číslo například 5:

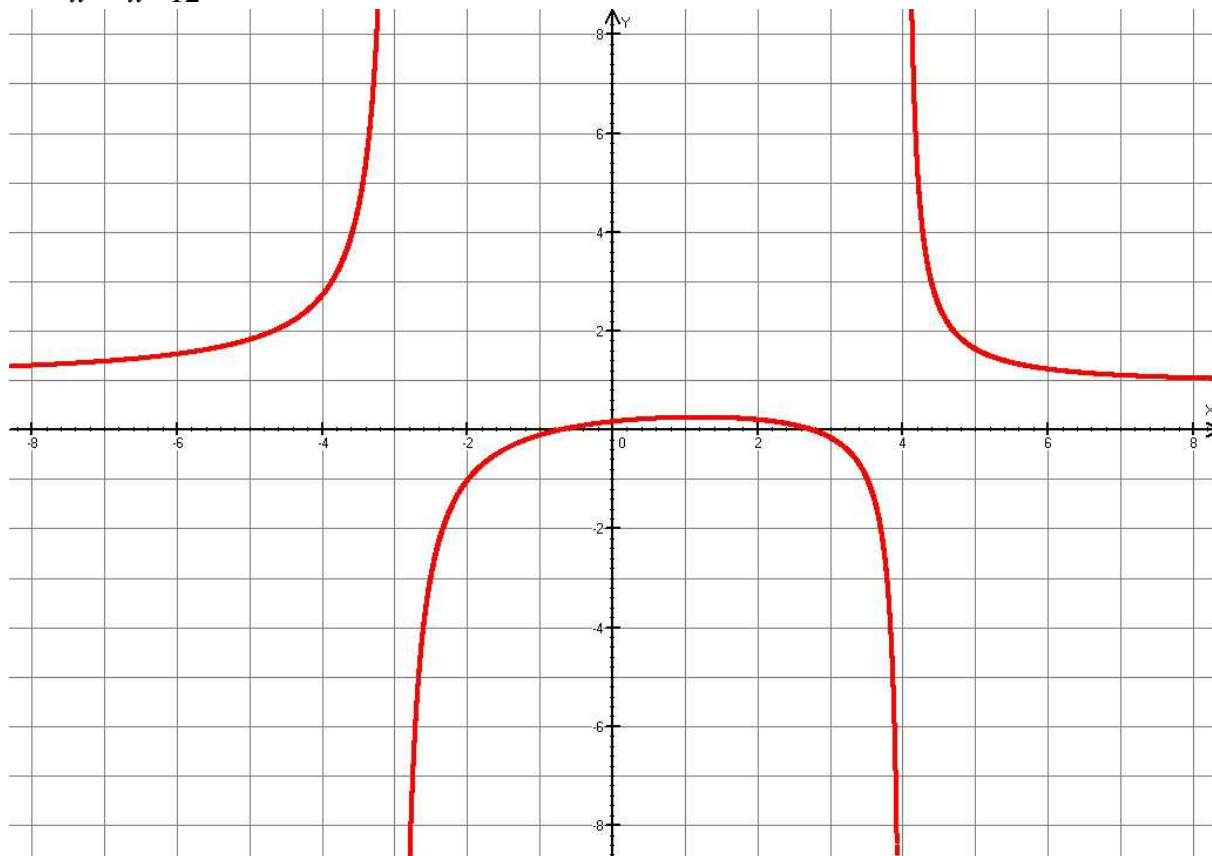
$$\frac{x^2 - 2x - 2}{x^2 - x - 12} \geq 0 \qquad \frac{(5)^2 - 2(5) - 2}{(5)^2 - (5) - 12} \geq 0$$

$1,625 \geq 0$ - platí \Rightarrow interval $(4; \infty)$ je řešením

Protože řešená nerovnice má nerovnost \geq přidáme k nalezeným intervalům ještě nulové body
 $\Rightarrow K = (-\infty; -3) \cup (1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3}) \cup (4; \infty)$

Poznámka: Správnost řešení předchozí nerovnice si můžeme ověřit pomocí grafu funkce

$$y = \frac{x^2 - 2x - 2}{x^2 - x - 12}$$



Pedagogická poznámka: Nejčastější chybou v předchozím příkladu je výpočet rovnice, kdy

některí rovnici násobí takto: $\frac{x^2 - 2x - 2}{x^2 - x - 12} = 0 \quad / \cdot (x^2 - x - 12)$

$x^2 - 2x - 2 = x^2 - x - 12$ a neuvědomí si, že pravá strana rovnice je nulová.

Metodou nulových bodů můžeme řešit i nerovnice, které jsme dosud raději přehlíželi:

Př. 3: Vyřeš nerovnici $\frac{x^2 - 3x - 22}{x^2 - x - 12} \geq 2$ metodou nulových bodů.

1. Zjistíme podmínky existence výrazů na obou stranách nerovnice

levá strana: nelze dělit nulou $\Rightarrow x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3) = 0 \Rightarrow x_1 = -3; x_2 = 4$



Nerovnici můžeme řešit pouze pro $x \neq -3; 4$.

2. Hledáme řešení rovnice $\frac{x^2 - 3x - 22}{x^2 - x - 12} = 2$ (abychom objevili nulové body nerovnice),

kde funkce přechází přes osu x .

$$\frac{x^2 - 3x - 22}{x^2 - x - 12} = 2 \quad / \cdot (x^2 - x - 12)$$

$$x^2 - 3x - 22 = 2(x^2 - x - 12)$$

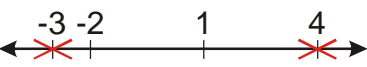
$$x^2 - 3x - 22 = 2x^2 - 2x - 24$$

$$0 = x^2 + x - 2$$

$$x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1) = 0$$

$$x_1 = -2$$

$$x_2 = 1$$

Doplňme získané kořeny na osu: 

3. Testujeme jednotlivé intervaly, zda splňují nerovnost

- interval $(-\infty; -3)$: vybereme číslo například -10:

$$\frac{x^2 - 3x - 22}{x^2 - x - 12} \geq 2 \qquad \frac{(-10)^2 - 3(-10) - 22}{(-10)^2 - (-10) - 12} \geq 2$$

$1,1 \geq 2$ - neplatí \Rightarrow interval $(-\infty; -3)$ není řešením

- interval $(-3; -2)$: vybereme číslo například -2,5:

$$\frac{x^2 - 3x - 22}{x^2 - x - 12} \geq 2 \qquad \frac{(-2,5)^2 - 3(-2,5) - 22}{(-2,5)^2 - (-2,5) - 12} \geq 2$$

$2,5 \geq 2$ - platí \Rightarrow interval $(-3; -2)$ je řešením

- interval $(-2; 1)$: vybereme číslo například 0:

$$\frac{x^2 - 3x - 22}{x^2 - x - 12} \geq 2 \qquad \frac{(0)^2 - 3(0) - 22}{(0)^2 - (0) - 12} \geq 2$$

$1,83 \geq 2$ - neplatí \Rightarrow interval $(-2; 1)$ není řešením

- interval $(1; 4)$: vybereme číslo například 3:

$$\frac{x^2 - 3x - 22}{x^2 - x - 12} \geq 2 \qquad \frac{(3)^2 - 3(3) - 22}{(3)^2 - (3) - 12} \geq 2$$

$3,68 \geq 2$ - platí \Rightarrow interval $(1; 4)$ je řešením

- interval $(4; \infty)$: vybereme číslo například 5:

$$\frac{x^2 - 3x - 22}{x^2 - x - 12} \geq 2 \qquad \frac{(5)^2 - 3(5) - 22}{(5)^2 - (5) - 12} \geq 2$$

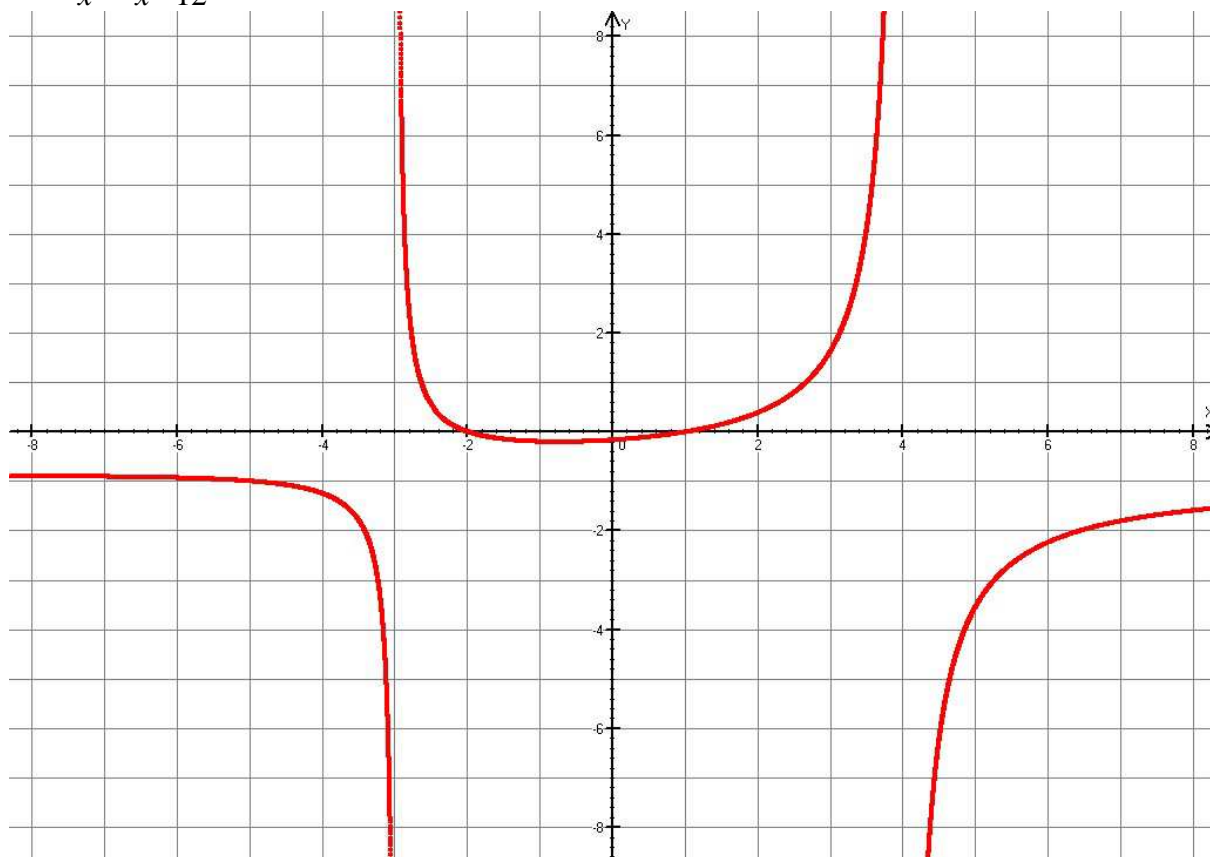
$-1,5 \geq 0$ - neplatí \Rightarrow interval $(4; \infty)$ není řešením

Protože řešená nerovnice má nerovnost \geq přidáme k nalezeným intervalům ještě nulové body

$$\Rightarrow K = (-3; -2) \cup (1; 4)$$

Poznámka: Správnost řešení předchozí nerovnice si můžeme ověřit pomocí grafu funkce

$$y = \frac{x^2 - 3x - 22}{x^2 - x - 12} - 2$$



Pedagogická poznámka: Nejčastější chyba v příkladu 3 je „obrácená“ k nejčastější chybě v příkladu 2. Někteří studenti se chovají, jako by pravou stranu opět tvořila nula a nulové body počítají pouze z čitatele zlomku.

Př. 4: Sestav stručný přehled možností řešení nerovnic s neznámou pod odmocninou.

Nerovnici se neznámou pod odmocninou můžeme řešit:

- Umocňováním nerovnice:
 - před umocněním musíme zjistit, jak se mění znaménko obou stran nerovnice,
 - podle znamének obou stran:
 - nic neřešíme, protože nerovnost je jasná,
 - umocníme (obě strany kladné),
 - umocníme a obrátíme nerovnost (obě strany záporné).
- Metodou nulových bodů:
 - určíme definiční obor (výsledky vyznačíme na ose),
 - vyřešíme odpovídající rovnici (výsledky vyznačíme na ose),
 - dosazením bodů z intervalů na ose zjistíme, zda je nerovnice v daném intervalu splněna.

Př. 5: Petáková:
strana 12/cvičení 2 g)
strana 12/cvičení 3 e)

strana 14/cvičení 17 g)
strana 14/cvičení 19 d) e)
strana 15/cvičení 23 j) l)

Shrnutí: Metodu nulových bodů můžeme použít na všechny druhy nerovnic, které jsme dosud řešili.